18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

a) Nimm die Ziffer 5 jeweils 4mal und bilde Aufgaben, die als Ergebnis die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 und 10 haben. Beachte dabei die Rangfolge der Rechenoperationen und setze Klammern, wenn es erforderlich ist. Du darfst auch aus zwei Ziffern 5 z.B. die 55 bilden und benutzen.

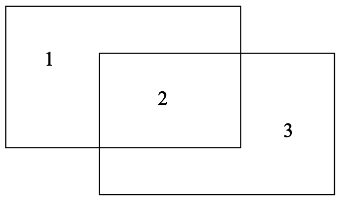
Hier ein Beispiel für das Ergebnis 11: $5 + 5 + 5 : 5 = 11$

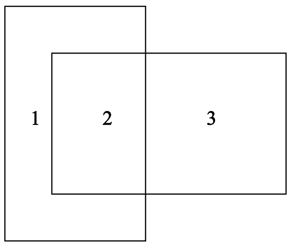
b) Gib das Ergebnis 8 mit **möglichst wenigen** Ziffern 5 an. Dabei sollte Deine Lösung weniger oft die Ziffer 5 verwenden als das folgende Beispiel:

$(5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) : 5 = 8$

2. Aufgabe

Man kann zwei gleichgroße Rechtecke (3 cm x 5 cm) so aufeinander legen, dass 3 getrennte Gebiete entstehen (siehe Abbildung A). Dabei sollen die Rechteckseiten jeweils parallel bleiben. Die Abbildung zeigt zwei verschiedene Möglichkeiten.





a) Kann man die Rechtecke auch so zeichnen, dass 4, 5 oder 6 Gebiete entstehen?

Wenn ja, dann gib jeweils eine Zeichnung an!

Wenn nicht, dann begründe, dass es nicht geht!

b) Nun sollen 3 gleich große Rechtecke übereinander gelegt werden. Wie kann man 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 Gebiete erhalten? Gib jeweils eine Zeichnung an!

3. Aufgabe

a) Pia, Eva und Michaela starten beim 50 m - Lauf. In welcher Reihenfolge können sie ins Ziel laufen? Wie viele Möglichkeiten gibt es?

b) Bei einem anderen Sportfest treten Peter, Egon, Michael und Hans zum 50 m - Lauf an.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?
Was passiert, wenn 6 Sporter starten?

c) Nachdem die 6 Sportler mehrfach gelaufen sind, stellen sie fest, dass inzwischen jeder Teilnehmer mindestens einmal vor jedem anderen Teilnehmer ins Ziel gekommen ist. Wie viele Läufe haben sie mindestens bestritten?

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Im Kino „Cinemoritz“ gibt es die drei Schalter A, B und C. Noch ist **keiner** geöffnet.

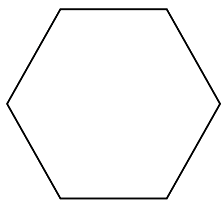
a) Albert, Britta, Carolin und Dieter gehen kurz nacheinander ins Kino. Jeder stellt sich an einem derjenigen Schalter an, an dem die wenigsten Personen vor ihm warten.
Wie viele verschiedenen Möglichkeiten gibt es für die Anordnung der Personen an den Schaltern. Begründe deine Lösung.

b) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es, wenn auch noch Elisabeth vor Schalteröffnung kommt und sich entsprechend anstellt?

c) Ein anderes Kino hat vier Schalter. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung für die fünf Personen gibt es, wenn sie sich an den vier Schaltern anstellen können?

2. Aufgabe

Durch folgende Konstruktion kann man ein gleichseitiges Sechseck erhalten:
Zeichne einen Kreis mit einem Radius von 3 cm. Lege auf dem Kreis einen Punkt fest. Trage von diesem Punkt aus auf dem Kreis weitere Punkte mit der gleichen Zirkelspanne von 3 cm ab, indem du immer in den zuletzt gezeichneten Punkt einsetzt. Verbinde jeweils benachbarte Punkte miteinander.
Teile das nebenstehende Sechseck durch jeweils eine Strecke in:



a) 2 Vierecke,
b) 2 Fünfecke,
c) 1 Dreieck und 1 Fünfeck,
d) 1 Dreieck und 1 Sechseck,
e) 1 Dreieck und 1 Siebeneck,
f) 1 Viereck und 1 Fünfeck,
g) 1 Viereck und 1 Sechseck.

Mache für jede Teilaufgabe eine neue Zeichnung.

3. Aufgabe

Nimm eine beliebige zweistellige Zahl und schreibe sie dreimal hintereinander, um auf diese Art eine sechsstellige Zahl zu erhalten.
Beispiel: Aus der Zahl 36 erhält man 363636.

a) Finde ein Beispiel dafür, dass die so gebildete sechsstellige Zahl nicht durch 4 teilbar ist.

b) Bestimme für 6 solcher sechsstelligen Zahlen die gemeinsamen, einstelligen Teiler. Von den sechsstelligen Zahlen sollten 3 gerade und 3 ungerade sein.

c) Begründe, dass es drei einstellige Zahlen gibt, die Teiler einer jeden auf diese Weise gebildeten sechstelligen Zahl sind.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Thomas kontrolliert den Inhalt seiner Sparbüchse und stellt fest, dass er nur 1-Cent-Münzen und 5-Cent-Münzen gespart hat. Er zählt 1000 Münzen.
Als seine große Schwester die Zählung ihres Bruders nachprüft, stellt sie fest, dass Thomas sich um nicht mehr als 9 Münzen verzählt hat und es genau zehnmal so viele 1-Cent-Münzen wie 5-Cent-Münzen sind.
Wie viel Geld hat Thomas in seiner Sparbüchse, wenn wir annehmen, dass sich die Schwester nicht geirrt hat?

2. Aufgabe

Es seien n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$ acht aufeinander folgende natürliche Zahlen mit $n > 1$.
Aus diesen Zahlen sollen alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ mit $z_1 \neq z_2$ ermittelt werden, in denen z_1 ein Teiler von z_2 ist.

a) Wenn $n = 2$ ist, lauten die acht Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Bilde alle Paare aus diesen Zahlen mit der genannten Bedingung.

b) Prüfe nun, für welche weiteren natürlichen Zahlen n es solche Paare aus der Reihe der 8 Zahlen gibt. Gib diese Zahlen n an.

c) Nenne alle Paare, die die genannten Forderungen erfüllen!

3. Aufgabe

Am 25. März 2002 meldete sich meine Freundin, die Singdrossel, von ihrer Winterreise zurück. Sie weckte mich mit ihrem Gesang, als mein Wecker 6.15 Uhr anzeigte. Abends um 18.30 Uhr hörte ich sie zum letzten Mal. Sie begann bis zum 21. Juni ihren morgendlichen Gesang täglich 2 Minuten früher und beendete ihn abends 2 Minuten später.

a) Wie viel Zeit hat die Singdrossel in der Nacht vom 20. bis zum 21. Juni zum Schlafen?

b) Wann beginnt sie am 21. Juni morgens mit ihrem Gesang?
Beachte dabei, dass am 31. März die Sommerzeit begonnen hat.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Eine Buchhandlung verkaufte von den vorhandenen Exemplaren eines neu erschienenen Romans am ersten Tag den achten Teil und 10 Stück, am zweiten Tag vom Restbestand die Hälfte und noch 15 Stück. Es verblieben danach noch 50 Exemplare. Wie viele Exemplare wurden anfangs zum Verkauf angeboten?

2. Aufgabe

a) Überzeuge dich, dass es zwischen den 4 Eckpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 eines Vierecks genau 6 Verbindungsstrecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_1P_4}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_2P_4}$, $\overline{P_3P_4}$ gibt und dass es genau 4 Dreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_2P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_2P_3P_4$ gibt, die diese Verbindungsstrecken als Seiten besitzen!

   Zeichne ein konvexes Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$!

   Wie viele Verbindungsstrecken gibt es zwischen den 5 Eckpunkten?

   Wie viele Dreiecke mit diesen Verbindungsstrecken als Seiten gibt es?

   Zeige, dass es möglich ist, diese Verbindungsstrecken so mit den Farben rot und blau zu färben, dass es kein Dreieck gibt, dessen Seiten alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind!

b) Betrachte ein konvexes Sechseck!

   Zeige, dass es in diesem Fall stets mindestens ein Dreieck gibt, dessen Seiten alle mit der gleichen Farbe gefärbt sind!

Hinweis: Ein n-Eck heißt konvex, wenn alle Innenwinkel dieses n-Ecks kleiner als 180° sind.

3. Aufgabe

Max bildet Zahlenfolgen von zweistelligen Zahlen nach folgender Regel:
Die erste Zahl einer solchen Folge ist eine Zahl z_1. Man multipliziert z_1 mit 3.
Ist das Ergebnis dreistellig, dann ist die Zahlenfolge zu Ende und besteht nur aus z_1.
Ist das Ergebnis aber zweistellig, dann werden die beiden Ziffern von $3 \cdot z_1$ vertauscht und die so entstandene Zahl wird z_2 genannt. (Sollte z_n eine einstellige Zahl sein, dann wird sie als zweistellige Zahl mit der Zehnerstelle 0 geschrieben.)
Mit z_2 verfährt man jetzt genauso. Ist $3 \cdot z_2$ dreistellig, dann ist die Folge mit z_2 zu Ende. Ist aber $3 \cdot z_2$ zweistellig, dann erhält man z_3, indem man bei $3 \cdot z_2$ die Ziffern vertauscht.
Analog bildet man die weiteren Zahlen $z_4, z_5, \ldots$ einer solchen Folge.

a) Ermittle die sechs Zahlenfolgen, die zu den Zahlen $z_1 = 10$ bis $z_1 = 15$ gehören!

b) Beweise die folgenden Aussagen

   (1) Jede solche Folge enthält höchstens 5 Zahlen.

   (2) Wenn $z_1 > 33$, dann besteht die Folge aus genau einer Zahl;
   wenn $z_1 \leq 33$ und $z_2 > 33$, dann besteht die Folge aus genau zwei Zahlen;
   wenn $z_1 \leq 33$, $z_2 \leq 33$ und $z_3 > 33$, dann besteht die Folge aus genau drei Zahlen;
   usw.

   (3) Die Zahl z_2 ist stets durch 3 teilbar; die Zahlen $z_3, z_4, \ldots$ sind stets durch 9 teilbar.

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Aus dem nachfolgenden Schema soll eine richtig gelöste Additionsaufgabe entstehen, indem alle Großbuchstaben mit Ziffern belegt werden, verschiedene Großbuchstaben bedeuten verschiedene, gleiche Großbuchstaben bedeuten gleiche Ziffern:

$$\begin{array}{rccccc} & & T & I & E & R \\ + & & B & A & U & M \\ \hline & L & E & B & E & N \end{array}$$

Eine geeignete Belegung heißt Lösung der Aufgabe. Zwei Lösungen sind dann voneinander verschieden, wenn sie sich in der Belegung für mindestens einen Großbuchstaben unterscheiden.
Beweisen Sie, dass es mindestens vier verschiedene Lösungen gibt!

2. Aufgabe

Die Werbung auf einem Nachfüllpack, dessen Inhalt zum zweimaligen Nachfüllen der Originalverpackung reicht, verspricht: „Sie sparen 75% Verpackungsmaterial.“

a) Weisen Sie nach, dass diese Werbung nicht in folgender Bedeutung zutreffen kann: „Es werden 75% des Verpackungsmaterials eingespart, wenn jemand anstelle von drei Originalpackungen nur eine Originalpackung und dazu ein Nachfüllpack kauft.“

b) Die Lösung von a) lässt vermuten, dass die Werbung in folgendem Sinn zutrifft: „Wenn man anstelle von zwei Originalpackungen ein Nachfüllpack kauft, werden 75% des Verpackungsmaterials eingespart.“

   Ermitteln Sie unter dieser Annahme, wieviel Prozent des Verpackungsmaterials eingespart werden, wenn man statt fünf Originalpackungen nur eine und dazu zwei Nachfüllpacks kauft.

3. Aufgabe

In einem Quadrat ist jeder der vier Eckpunkte mit den beiden Seitenmitten der nicht anliegenden Seiten verbunden. Die acht Verbindungsstrecken schneiden ein Achteck aus. Wie groß ist der Anteil des Achtecks an der Gesamtfläche des Quadrats?

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Thomas versucht, das graphische Bild der Funktion

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}} \tag{1}$$

zu ermitteln, indem er für x zehn verschiedene reelle Zahlen in (1) einsetzt. Das Resultat verwundert ihn.

a) Was könnte Thomas verwundert haben?

b) Bestimmen Sie Definitions– und Wertebereich der Funktion f.

2. Aufgabe

Im Land der Schildbürger sind nur 2 Münztypen im Umlauf: 19-Schilling-Münzen und 80-Schilling-Münzen. Schillo beklagt sich: Ich kann etwas, das 8 Schilling oder das 98 Schilling kostet, nicht bezahlen.

a) Hat Schillo recht?

b) Welche ganzzahligen Beträge können bezahlt werden?

Hinweis: Ein Geldbetrag kann auch bezahlt werden, indem der Zahler einen Betrag gibt, auf den der Empfänger passend herausgeben kann.

3. Aufgabe

In einem Quadrat ist jeder der vier Eckpunkte mit den beiden Seitenmitten der nicht anliegenden Seiten verbunden. Die acht Verbindungsstrecken schneiden ein Achteck aus. Wie groß ist der Anteil des Achtecks an der Gesamtfläche des Quadrats?

18. Essener Mathematikwettbewerb 2002/2003

als erste Runde der 42. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Ein Kegel der Höhe H steht auf der Spitze. Er wird teilweise mit Wasser gefüllt, so dass das Wasser bis zur Höhe h steht. Nach dem Verschließen der Füllöffnung wird der Kegel so umgedreht, dass er auf seiner Grundfläche steht. Wie hoch ist jetzt der Wasserstand?

2. Aufgabe

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen, die nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar sind.

Hinweis: Insbesondere sind $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ Quadratzahlen.

3. Aufgabe

Anna und Berta spielen ein Spiel mit natürlichen Zahlen. Sie ziehen abwechselnd. Ein Zug besteht darin, aus einer natürlichen Zahl durch Addition eines ihrer echten Teiler eine neue Zahl zu bilden. Gewonnen hat das Spiel, wer als erster eine Zahl größer oder gleich 2003 erreicht hat.
Anna beginnt das Spiel, indem sie zur Startzahl 2 den einzigen echten Teiler 1 addiert und 3 erhält.

a) Zeige: Anna kann durch geschickte Wahl ihrer Züge immer erreichen, dass während des gesamten Spiels Berta zu Beginn ihrer Züge immer eine ungerade Zahl vorliegen hat.

b) Kann Anna sogar immer den Gewinn erzwingen? Begründe deine Antwort!

Hinweis: Ein Teiler t von n heißt genau dann ein echter Teiler, wenn $t \neq n$ gilt. So sind z.B. 1,2,3,4 und 6 die echten Teiler der Zahl 12.