19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Bei einer schriftlichen Divisionsaufgabe ist leider Wasser über die Tinte gelaufen, so dass zwar noch klar ist, wo Ziffern standen – aber nur noch die Ziffern 0 und 1 sind lesbar. Man weiß auch, dass an den beiden schwarz gekennzeichneten Stellen dieselbe Ziffer stand.

Zeile 1:	■	1	0	0	:	■	□	=	□	□
Zeile 2:	1	□	□							
Zeile 3:		1	□	0						
Zeile 4:		1	□	0						
Zeile 5:				0						

Stelle die ursprüngliche Divisionsaufgabe wieder her! (Sie war übrigens richtig gelöst.)

2. Aufgabe

Eine historische Aufgabe:

Freundchen, willst Du wohl erwägen,
Was ich zu sagen bin bereit:
Es soll nämlich von Pulsesschlägen
Abhängen unsre Lebenszeit;
Es hat's ein Mann von Geist gesagt,
Drum sei es auch von mir gewagt.
Durchschnittlich schlägt an 60 Mal
Das Herz in einer Minute;
Gewöhnlich ist 70 die Zahl
Der Jahr' bei ruhigem Blute.
Ist so die Schlägezahl verschwunden,
So endigen die Lebensstunden.
Bringt aber man durch Übermaß
Das Blut in schnelleren Umlauf,
Und steigert's ohne Unterlaß
Zu 75 Schlägen 'nauf,
So läuft die Lebensuhr eh'r ab,
Und bringet früher uns ins Grab.
Drum lasst uns üben Mäßigkeit,
Sie bringt uns an das rechte Ziel,
Giebt frohen Muth und Gesundheit,
Auch Freuden, unaussprechlich viel.
Wie viele Jahre kürzt so, halt' er,
Unmäßigkeit das Lebensalter?

Die Frage ist also: Um wie viele Jahre kürzt nach dem Gedicht das Übermaß die Lebenszeit? (Wir wollen alle Jahre zu 365 Tagen rechnen.)

3. Aufgabe

Drei Altersaufgaben:

1. Ein Großvater und sein Enkel sind heute zusammen 100 Jahre alt. Vor zehn Jahren war der Großvater genau dreimal so alt wie sein Enkel. Wie alt sind die beiden jetzt?
2. Katharina ist um sieben Jahre älter als Felix, ihr Bruder. Damit ist sie um drei Jahre mehr als doppelt so alt wie Felix. Wie alt sind die beiden?
3. Peter ist vier Jahre älter als seine Schwester Laura. Vor vier Jahren war er gerade doppelt so alt wie sie. In wie viel Jahren wird das jüngere der beiden Geschwister volljährig (18 Jahre)?

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Eine historische Aufgabe:

Freundchen, willst Du wohl erwägen,
Was ich zu sagen bin bereit:
Es soll nämlich von Pulsesschlägen
Abhängen unsre Lebenszeit;
Es hat's ein Mann von Geist gesagt,
Drum sei es auch von mir gewagt.
Durchschnittlich schlägt an 60 Mal
Das Herz in einer Minute;
Gewöhnlich ist 70 die Zahl
Der Jahr' bei ruhigem Blute.
Ist so die Schlägezahl verschwunden,
So endigen die Lebensstunden.
Bringt aber man durch Übermaß
Das Blut in schnelleren Umlauf,
Und steigert's ohne Unterlaß
Zu 75 Schlägen 'nauf,
So läuft die Lebensuhr eh'r ab,
Und bringet früher uns ins Grab.
Drum lasst uns üben Mäßigkeit,
Sie bringt uns an das rechte Ziel,
Giebt frohen Muth und Gesundheit,
Auch Freuden, unaussprechlich viel.
Wie viele Jahre kürzt so, halt' er,
Unmäßigkeit das Lebensalter?

Die Frage ist also: Um wie viele Jahre kürzt nach dem Gedicht das Übermaß die Lebenszeit? (Wir wollen alle Jahre zu 365 Tagen rechnen.)

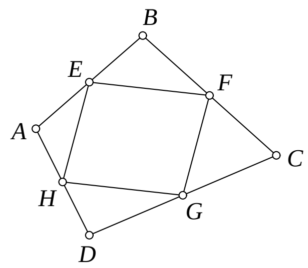
2. Aufgabe

Drei Altersaufgaben:

1. Ein Großvater und sein Enkel sind heute zusammen 100 Jahre alt. Vor zehn Jahren war der Großvater genau dreimal so alt wie sein Enkel. Wie alt sind die beiden jetzt?
2. Katharina ist um sieben Jahre älter als Felix, ihr Bruder. Damit ist sie um drei Jahre mehr als doppelt so alt wie Felix. Wie alt sind die beiden?
3. Peter ist vier Jahre älter als seine Schwester Laura. Vor vier Jahren war er gerade doppelt so alt wie sie. In wie viel Jahren wird das jüngere der beiden Geschwister volljährig (18 Jahre)?

3. Aufgabe

Die Abbildung zeigt ein beliebiges Viereck $ABCD$ und das Viereck $EFGH$, das entsteht, wenn jeweils die Mittelpunkte der Seiten verbunden werden. Solch ein Viereck, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten sind, heißt Mittenviereck.
Zeichne die Mittenvierecke zu



a) einem Drachenviereck,
b) einem gleichschenkligen Trapez,
c) einer Raute (oder Rhombus),
d) einem Rechteck und
e) einem Quadrat.

(Wenn du noch nicht weißt, wie diese Vierecke genau aussehen, erkundige dich bei deiner Lehrkraft oder schaue in deinem Mathematikbuch nach.)

Entscheide in jedem der Fälle, was für ein Viereck das Mittenviereck ist!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

In einem Buch, das um 1350 geschrieben wurde, veröffentlichte Maximus Planudes folgende Aufgabe:
Ein Maultier und ein Pferd trugen einige Säcke. Das Pferd ermüdete schneller und sagte zum Maultier: „Hilf mir bitte, nimm einen Sack von meinem Rücken und trage du ihn weiter!“ „Würde ich das machen“, erwiderte das Maultier, „so wäre meine Last doppelt so groß wie deine. Wenn du mir aber einen Sack abnimmst und ihn trägst, werden wir die gleichen Lasten tragen.“
Wie viele Säcke trug das Maultier, wie viele das Pferd?

2. Aufgabe

Abergläubische Menschen befürchten Unangenehmes oder erhoffen sich etwas Besonderes, wenn ein Freitag der dreizehnte Tag eines Monats ist.

a) Wenn der 1.1. eines Jahres ein Montag ist, welche Wochentage sind dann der 2.2. , der 3.3. , der 11.11. ? Beachte, dass es sich um ein Normal- oder eine Schaltjahr handeln kann.

b) Untersuche, ob im Laufe eines jeden Jahres mindestens einmal ein „Freitag der dreizehnte“ auftritt, unabhängig davon, ob das Jahr ein Schaltjahr ist oder nicht!

c) Wie oft kann es im Jahr höchstens einen „Freitag den dreizehnten“ geben? Auf welchen Wochentag fällt dann der 1. Januar?

3. Aufgabe

a) Zeichne ein Sechseck, das folgende Eigenschaften hat:

   (I) Alle Diagonalen verlaufen im Innern der Figur

   (II) Durch die Schnittpunkte zweier Diagonalen verläuft keine weitere Diagonale

   Zeichne ein derartiges Sechseck und beantworte folgende Fragen:

   (1) Wie viele Diagonalen besitzt dieses Sechseck?

   (2) In wie viele Teilflächen wird das Sechseck durch Schnitte längs der Diagonalen zerlegt?

   (3) Wie viele dieser Teilflächen stoßen an den Rand des Sechsecks, haben also mit dem Sechseck genau zwei oder genau einen Eckpunkt gemeinsam?

b) Verfahre -wie bei a)- mit einem Siebeneck, das die Eigenschaften (I) und (II) besitzt. Beantworte auch für das Siebeneck die oben gestellten drei Fragen!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Aus einer Statistik des Regionalschulamtes geht hervor:
Von 1 000 Abiturienten legten genau 400 eine gute bzw. sehr gute Reifeprüfung ab, davon nur 45 % Mädchen. Die restlichen 600 Prüflinge schlossen mit mäßigen oder schlechten Ergebnissen ab; 64 % davon waren Jungen.
Untersuche, ob sich aus diesen Daten schließen lässt, dass die Mädchen insgesamt schlechter abgeschnitten haben als die Jungen!

2. Aufgabe

Abergläubische Menschen befürchten Unangenehmes oder erhoffen sich etwas Besonderes, wenn ein Freitag der dreizehnte Tag eines Monats ist.

a) Wenn der 1.1. eines Jahres ein Montag ist, welche Wochentage sind dann der 2.2. , der 3.3. , der 11.11. ? Beachte, dass es sich um ein Normal- oder eine Schaltjahr handeln kann.

b) Untersuche, ob im Laufe eines jeden Jahres mindestens einmal ein „Freitag der dreizehnte“ auftritt, unabhängig davon, ob das Jahr ein Schaltjahr ist oder nicht!

c) Wie oft kann es im Jahr höchstens einen „Freitag den dreizehnten“ geben? Auf welchen Wochentag fällt dann der 1. Januar?

3. Aufgabe

Anton und Bert suchen nach Möglichkeiten, ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a in regelmäßige Teilvielecke zu zerlegen, die ebenfalls die Seitenlänge a besitzen.
Anton behauptet: "Eine Lösung ist für das Sechseck sehr leicht zu finden. Ich glaube nicht, dass es für andere Vielecke eine solche Zerlegung gibt."
Bert antwortet: "Ich habe noch zwei weitere Lösungen für das Zwölfeck gefunden. Beachte, dass die regelmäßigen Teilvielecke zwar alle die gemeinsame Seitenlänge a besitzen, nicht aber alle von derselben Art sein müssen."

Zeichne die Vielecke, die Anton und Bert gefunden haben!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Bei einem Experiment mit einem (sechsseitigen) Würfel würfelt man mehrfach und addiert die geworfenen Augenzahlen, bis erstmals eine Augensumme größer als 18 erreicht ist. Welche Augensumme tritt bei der Beendigung des Würfelns am häufigsten auf?

2. Aufgabe

Auf einer Insel, die keinen Austausch mit der Außenwelt hat, lebt eine besondere Käferart. Die Population einer Generation besteht aus Eiern, Larven, Puppen und Käfern. Die Population einer neuen Generation entsteht stets dadurch, dass jeder Käfer 20 Eier legt und stirbt, sich aus 20 % der alten Eier Larven entwickeln, sich 50 % der alten Larven verpuppen und aus 50 % der alten Puppen Käfer schlüpfen. Die restlichen alten Eier, Larven und Puppen werden vertilgt.

a) Die Population der 1. Generation bestehe aus 40 Käfern, 200 Eiern, 100 Larven und 30 Puppen. Ermitteln Sie die Population der 5. Generation und die der 41. Generation.

b) Untersuchen Sie, ob es eine Ausgangspopulation gibt, die sich beim oben beschriebenen Generationswechsel nicht verändert. Ermitteln Sie gegebenenfalls alle derartigen Ausgangspopulationen.

3. Aufgabe

Eine Zahl heißt Zweierpotenz, wenn sie sich in der Form 2^k schreiben lässt. Dabei ist k eine natürliche Zahl und es gilt $2^0 = 1$.
Sei $z(n)$ diejenige Zahl, die entsteht, wenn man alle Zweierpotenzen von $k = 0$ bis $k = n$ nebeneinander aufschreibt, also z. B.

$$z(10) = 12481632641282565121024.$$

a) Ermittle jeweils die Primfaktorzerlegung von $z(1)$, $z(2)$, $z(3)$, $z(4)$ und $z(5)$!

b) Man kann vermuten, dass $z(n)$ für kein n durch 5 teilbar ist. Beweise diese Vermutung!

c) Äußere weitere Vermutungen über Eigenschaften der Zahl $z(n)$ in Abhängigkeit von n und versuche, diese Vermutungen zu beweisen!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Welche der folgenden Kryptogramme haben im Dezimalsystem eine Lösung?

a)

$$\begin{array}{cccccc} & & A & N & N & A \\ + & & E & M & I & L \\ \hline & N & A & M & E & N \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccccc} & & J & E & N & S \\ + & E & L & I & A & S \\ \hline & N & A & M & E & N \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{cccccc} & & A & S & T & A \\ + & & E & R & N & I \\ \hline & N & A & M & E & N \end{array}$$

Anmerkung:
Eine Lösung eines Kryptogramms ist eine Ersetzung der Buchstaben durch Ziffern $\{0; 1; \ldots; 9\}$, so dass gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt sind und eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Die erste Ziffer jeder bei der Ersetzung entstehenden 4- bzw. 5-stelligen Zahl soll von 0 verschieden sein.

2. Aufgabe

Ein Quader mit einer Oberfläche von $2\,400\,\text{cm}^2$ hat eine Raumdiagonale der Länge $50\,\text{cm}$. Wie lang sind die 12 Kanten des Quaders zusammen?

3. Aufgabe

Auf einer Insel, die keinen Austausch mit der Außenwelt hat, lebt eine besondere Käferart. Die Population einer Generation besteht aus Eiern, Larven, Puppen und Käfern. Die Population einer neuen Generation entsteht stets dadurch, dass jeder Käfer 20 Eier legt und stirbt, sich aus 20 % der alten Eier Larven entwickeln, sich 50 % der alten Larven verpuppen und aus 50 % der alten Puppen Käfer schlüpfen. Die restlichen alten Eier, Larven und Puppen werden vertilgt.

a) Die Population der 1. Generation bestehe aus 40 Käfern, 200 Eiern, 100 Larven und 30 Puppen. Ermitteln Sie die Population der 5. Generation und die der 41. Generation.

b) Untersuchen Sie, ob es eine Ausgangspopulation gibt, die sich beim oben beschriebenen Generationswechsel nicht verändert. Ermitteln Sie gegebenenfalls alle derartigen Ausgangspopulationen.

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als erste Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

In der Gleichung $E + S + S + E + N = 43$ soll jeder Buchstabe durch eine positive ganze Zahl ersetzt werden. Gleiche Buchstaben werden durch die gleiche Zahl ersetzt, unterschiedliche Buchstaben durch unterschiedliche Zahlen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Hinweis: In diesem Jahr wird die 43. Bundesrunde der Mathematik-Olympiade in Essen stattfinden.

2. Aufgabe

In einem Königreich leben N Ritter. Je zwei von ihnen sind entweder ein Paar von Freunden oder ein Paar von Feinden. Jeder Ritter hat genau drei Feinde. Im Königreich gilt das Gesetz: "Ein Feind meines Freundes ist auch mein Feind." Man bestimme alle Zahlen N, für die dies möglich ist.

3. Aufgabe

Von einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ mit der Seitenlänge a werden alle diejenigen Punkte entfernt, deren Abstand von sämtlichen Eckpunkten kleiner als a ist. Man ermittle den Flächeninhalt der verbleibenden Figur.