19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Arndt, Bertram, Cecil und Dirk gehen in eine Schule, an der Arbeitsgemeinschaften in Mathematik, Schach, Turnen und Zeichnen angeboten werden. Jeder dieser Schüler hat sich für eine dieser Arbeitsgemeinschaften angemeldet, und zwar jeder für eine andere. Folgendes ist bekannt:

(1) Bertram wollte ursprünglich in die Schach-AG gehen, hat sich dann aber doch anders entschieden.

(2) Der „Turner“, der „Zeichner“ und Bertram haben denselben Schulweg.

(3) Der „Turner“ ist eine Leseratte und verschlingt zur Zeit die Bücher über Harry Potter.

(4) Cecil ärgert sich, dass er bei der Mathematik-Olympiade schlechter abgeschnitten hat als der „Turner“.

(5) Arndt wurde vom „Zeichner“ zum Geburtstag eingeladen.

(6) Weder Dirk noch der „Zeichner“ haben bisher ein Buch über Harry Potter gelesen, wollen dies jedoch schleunigst nachholen.

a) Welche Arbeitsgemeinschaft besucht Bertram? Stelle dar, wie du deine Antwort aus den Angaben (1) bis (6) folgerst!

b) Untersuche, ob sich aus den Angaben (1) bis (6) auch klar und eindeutig ableiten lässt, welche Arbeitsgemeinschaften die anderen drei Jungen besuchen!

2. Aufgabe

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, reden über ihre Murmeln.

- Andrea sagt: Zusammen haben wir 65 Murmeln.
- Bettina sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Andrea.
- Christian sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Bettina.
- Dirk sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Christian.
- Eva sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Dirk.

Wie viele Murmeln haben die Kinder jeweils?

3. Aufgabe

Die Panzerknacker flüchten in einem Auto. Zwei Mathematiker sind Zeuge. Bei der Polizei macht der erste folgende Angaben zum Kennzeichen:

- Die Zahl auf dem Kennzeichen ist vierziffrig.
- Sie beginnt mit der Ziffer 5.
- Die Zahl ist eine Quadratzahl.
- Die Endziffer der Zahl auf dem Kennzeichen ist gleich der Endziffer der Zahl, deren Quadrat die Zahl auf dem Kennzeichen ist.

Kann die Polizei die Zahl auf dem Kennzeichen aus diesen Angaben eindeutig ermitteln? Wenn ja, gib die Zahl an; wenn nein, gib an, welche Kennzeichen-Zahlen möglich sind!
Der Kollege des ersten Mathematikers sagt:

- Mein Kollege hat mit fast allem recht – aber die Zahl begann mit einer Sechs.

Kann die Polizei aus diesen Angaben die Zahl eindeutig bestimmen?

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 6

1. Aufgabe

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, reden über ihre Murmeln.

- Andrea sagt: Eva hat doppelt so viele Murmeln wie ich.
- Bettina sagt: Ich habe eine Murmel mehr als Andrea.
- Christian sagt: Ich habe zwei Murmeln mehr als Bettina.
- Dirk sagt: Ich habe drei Murmeln mehr als Christian.
- Eva sagt: Ich habe vier Murmeln mehr als Dirk.

Wie viele Murmeln haben die Kinder jeweils?

2. Aufgabe

Eine Aufgabe von der Bahn:
Die Strecke von Ahausen nach Bestadt ist 72 km lang und eingleisig; lediglich im Bahnhof von Cedorf zwischen Ahausen und Bestadt gibt es ein Nebengleis, so dass dort zwei Züge aneinander vorbeifahren können. Cedorf ist 42 km von Bestadt entfernt.
Um 08.00 Uhr fährt ein Zug aus Ahausen in Richtung Bestadt los. Da es bis zum Ziel ständig bergauf geht, kommt er in einer Viertelstunde nur 10 km weit.
Die Züge von Bestadt nach Ahausen legen in einer Viertelstunde 15 km zurück (weil es ja bergab geht).

a) Wann fährt der Zug in Bestadt ab, wenn beide Züge in Bahnhof von Cedorf aneinander vorbeifahren sollen?
b) Wann erreicht der Zug aus Ahausen sein Ziel?
c) Wann kommt der Zug aus Bestadt unten in Ahausen an?

3. Aufgabe

In einem Rechteck liegt ein anderes Rechteck. Die Lage und die Maße sind in Abbildung A 430624 angegeben.
Welche Fläche hat das schattierte Rechteck?

Hinweis: Du solltest möglichst ohne Messen auskommen.

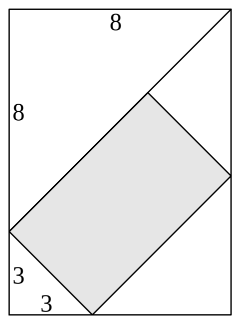


Abbildung A 430624

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Uli hat vier Sorten verschiedenfarbiger Kugeln, und zwar rote, blaue, gelbe und weiße. Kugeln gleicher Farbe haben auch stets gleiche Masse. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellte er fest, dass zwei blaue Kugeln genauso schwer sind wie eine rote Kugel. Weiter fand er, dass drei gelbe Kugeln ebenso viel wiegen wie eine blaue Kugel und dass fünf weiße Kugeln die gleiche Masse haben wie eine gelbe Kugel.

a) Wie viele weiße Kugeln muss Uli in die eine (leere) Waagschale legen, wenn sie einer roten Kugel in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?

b) In der einen Waagschale liegen 20 weiße und 5 gelbe Kugeln. Wie viele blaue Kugeln muss Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

2. Aufgabe

Aus dem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“, das 1770 von Leonhard Euler herausgegeben wurde und mehr als 100 Jahre lang zu den beliebtesten und meist gelesenen Lehrbüchern gehörte, stammt die Problemstellung zu folgender Aufgabe:

Ich habe einige (nicht unbedingt ganzzahlige) Ellen Tuch gekauft und dabei für je 5 Ellen 7 Taler bezahlt. Dann habe ich das gesamte Tuch wieder verkauft, wobei ich für je 7 Ellen 11 Taler bekam. Bei diesem Handel habe ich 100 Taler gewonnen.
Wie viele Ellen Tuches habe ich gekauft und anschließend wieder verkauft?

3. Aufgabe

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; die Größe des Winkels BAC sei wie üblich mit α bezeichnet. Im Inneren des Dreiecks werde ein beliebiger Punkt D gewählt. Dieser werde sowohl an der Geraden AB als auch an der Geraden AC gespiegelt; die Bildpunkte seien (in dieser Reihenfolge) mit P bzw. Q bezeichnet.

a) Ermittle die Größe des Winkels PAQ in Abhängigkeit von α!

b) Ermittle die Größe des Winkels QDP in Abhängigkeit von α!

c) Berechne α für den Fall, dass der Winkel QDP doppelt so groß ist wie der Winkel PAQ!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Antiquitätenhändler Gierig kauft einen Tisch und einen Stuhl für insgesamt 225 Euro ein. Er verkauft diese beiden Gegenstände mit 40 % Gewinn.
Wie viel Euro zahlte Herr Gierig beim Kauf für den Tisch und wie viel beim Kauf für den Stuhl, wenn ihm der Tisch beim Verkauf einen Gewinn von 25 % und der Stuhl einen Gewinn von 50 % brachte?
Weise durch eine Probe nach, dass dein Ergebnis alle gegebenen Bedingungen erfüllt!

2. Aufgabe

In einer Bakterienkolonie möge sich die Anzahl der Bakterien im Verlauf von jeweils 30 Minuten verdoppeln. In Abständen von 30 Minuten soll für Versuchszwecke genau viermal die gleiche Anzahl von Bakterien entnommen werden. Direkt vor der ersten Entnahme mögen sich genau 3 000 Bakterien in der Kolonie befinden.

a) Wie groß kann die Anzahl der entnommenen Bakterien höchstens sein?
b) Wie viele Bakterien dürfen höchstens entnommen werden, wenn $1\frac{1}{2}$ Stunden nach der vierten Entnahme der anfängliche Bestand wiederhergestellt sein soll?

3. Aufgabe

Es sei k ein Kreis um M. Auf der Kreislinie liegen (in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C, D so, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind:

$\overline{AB}$ ist ein Durchmesser von k. (1)

Die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{AM}$ haben die gleiche Länge. (2)

Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ haben die gleiche Länge. (3)

Zeige, dass durch diese Bedingungen die Größen der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ eindeutig bestimmt sind!
Gib die Größen der Innenwinkel an!

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

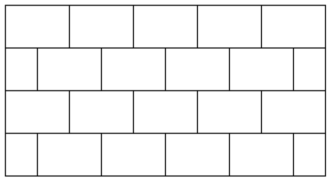
Klasse 9

1. Aufgabe

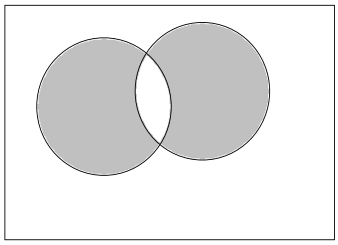
Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, deren letzte Ziffer eine 4 ist und die durch 4 teilbar sind?

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n-stellig, wenn ihre erste Ziffer von 0 verschieden ist.

2. Aufgabe



a) Die „Mauer“ in Abbildung A 430922 ist mit drei Farben so zu färben, dass jeder „Ziegel“ genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs einer Strecke berührenden „Ziegel“ gleich gefärbt sind.
Stelle die Färbung auf dem Arbeitsblatt dar.



b) Ulrike hat auf ein Blatt Papier zwei gleich große Kreise gemalt und die entstandenen Teilflächen mit 2 Farben eingefärbt. Dabei haben die Teilflächen, die längs eines Kreisbogens aneinanderstoßen, unterschiedliche Farben.
Sie zeichnet später einen dritten Kreis der gleichen Größe dazu. Kann sie in jedem Fall bei einer Neueinfärbung wieder mit zwei Farben auskommen?

c) Ulrike fügt nun schrittweise je einen weiteren Kreis hinzu. Alle Kreise sind gleich groß. Sie versucht, die Flächen neu einzufärben. Kann sie auch bei 10 Kreisen noch mit 2 Farben auskommen?

3. Aufgabe

Der Logiker L und der Mathematiker M haben am gleichen Tag Geburtstag. Bei ihrer gemeinsamen Geburtstagsfeier unterhalten sich die beiden Freunde L und M über ihre Alter (in ganzen Jahren):

L zu M: Ich habe mir drei natürliche Zahlen gedacht, deren Produkt 2 450 ist und deren Summe dein Alter angibt.

M zu L nach längerem Nachdenken und Rechnen: Daraus kann ich die drei Zahlen nicht ermitteln.

L zu M: Jede der drei Zahlen ist kleiner als mein Alter.

M zu L: Jetzt kenne ich die drei Zahlen.

a) Wie heißen die drei Zahlen?

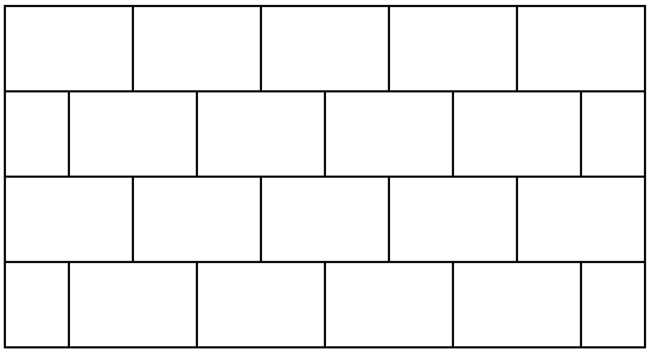
b) Wie alt sind L und M?

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Arbeitsblatt zu Aufgabe 2, Klasse 9

Name:



19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Der Logiker L und der Mathematiker M haben am gleichen Tag Geburtstag. Bei ihrer gemeinsamen Geburtstagsfeier unterhalten sich die beiden Freunde L und M über ihre Alter (in ganzen Jahren):

L zu M: Ich habe mir drei natürliche Zahlen gedacht, deren Produkt 2 450 ist und deren Summe dein Alter angibt.

M zu L nach längerem Nachdenken und Rechnen: Daraus kann ich die drei Zahlen nicht ermitteln.

L zu M: Jede der drei Zahlen ist kleiner als mein Alter.

M zu L: Jetzt kenne ich die drei Zahlen.

a) Wie heißen die drei Zahlen?

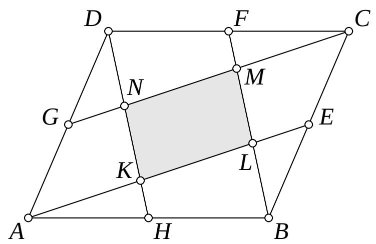
b) Wie alt sind L und M?

2. Aufgabe

Sei b eine ungerade ganze Zahl. Finden Sie alle ganzzahligen Werte von c in Abhängigkeit von b, für welche die Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ zwei verschiedene ganzzahlige Lösungen besitzt.

3. Aufgabe

Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten seien entsprechend der Abbildung mit E, F, G, H bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ schneiden im Inneren des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus (siehe Abbildung).



a) Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.

b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms zu dem des Parallelogramms $ABCD$.

19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 11

1. Aufgabe

Man weise nach, dass

$$\sqrt{20\,031\,114^2 + 20\,031\,115^2 + (20\,031\,114 \cdot 20\,031\,115)^2}$$

eine ungerade ganze Zahl ist

2. Aufgabe

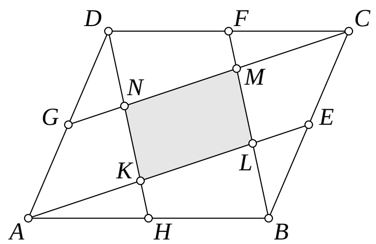
In einem Spiel sei jeder der acht Eckpunkte eines Würfels mit einer der Farben Rot und Blau gefärbt. Ein Zug des Spiels besteht darin, eine Ecke zu wählen und anschließend diese Ecke und ihre drei Nachbarecken, mit denen sie durch Kanten verbunden ist, umzufärben: aus blauen Ecken werden rote und aus roten Ecken werden blaue.
Man untersuche, ob es möglich ist, durch eine Folge derartiger Züge zu einem einfarbigen Würfel zu gelangen,

a) wenn zu Beginn genau eine Ecke des Würfels rot und die übrigen sieben Ecken blau gefärbt sind,
b) wenn zu Beginn die vier Eckpunkte einer Seitenfläche des Würfels rot und die übrigen vier Ecken blau gefärbt sind.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Die Seitenmitten seien entsprechend der Abbildung mit E, F, G, H bezeichnet. Die Verbindungslinien $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ schneiden im Inneren des Parallelogramms ein Viereck $KLMN$ aus (siehe Abbildung).

a) Zeigen Sie, dass $KLMN$ ein Parallelogramm ist.
b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms zu dem des Parallelogramms $ABCD$.



19. Essener Mathematikwettbewerb 2003/2004

als zweite Runde der 43. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 12 - 13

1. Aufgabe

Man weise nach, dass

$$\sqrt{20\,031\,114^2 + 20\,031\,115^2 + (20\,031\,114 \cdot 20\,031\,115)^2}$$

eine ungerade ganze Zahl ist

2. Aufgabe

In einem Spiel sei jeder der acht Eckpunkte eines Würfels mit einer der Farben Rot und Blau gefärbt. Ein Zug des Spiels besteht darin, eine Ecke zu wählen und anschließend diese Ecke und ihre drei Nachbarecken, mit denen sie durch Kanten verbunden ist, umzufärben: aus blauen Ecken werden rote und aus roten Ecken werden blaue.
Man untersuche, ob es möglich ist, durch eine Folge derartiger Züge zu einem einfarbigen Würfel zu gelangen,

a) wenn zu Beginn genau eine Ecke des Würfels rot und die übrigen sieben Ecken blau gefärbt sind,
b) wenn zu Beginn die vier Eckpunkte einer Seitenfläche des Würfels rot und die übrigen vier Ecken blau gefärbt sind.

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Auf der Seite $\overline{BC}$ liegt der Punkt E und auf der Seite $\overline{CD}$ der Punkt F. Die Punkte E und F liegen so, dass der Winkel $\angle EAF$ die Größe $45°$ hat. Die Diagonale $\overline{BD}$ wird von der Strecke $\overline{AE}$ im Punkte P und von der Strecke $\overline{AF}$ im Punkte Q geschnitten.
Man beweise, dass der Flächeninhalt des Dreiecks AEF doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks APQ.