

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Frau Schmidt-Gebauer hat 27 Kinder in ihrer Klasse. Im Werkunterricht stellt jedes Kind einen gleich großen Holzwürfel her. Diese 27 kleinen Würfel sollen zu einem großen zusammengesetzt werden. Alle Seitenflächen des großen Würfels sollen am Ende nach dem Zusammenbau weiß sein. Frau Schmidt-Gebauer möchte, dass ihre Kinder ihre kleinen Würfel vor dem Zusammenbau richtig bemalen – und außerdem sollen sie nur die später sichtbaren Flächen anmalen.

Wie viele Kinder müssen jeweils wie viele Flächen auf ihren Würfeln anmalen?

Wie müssen die angemalten Flächen auf ihren Würfeln angeordnet sein?

2. Aufgabe

Caroline erwartet ihre Freundin Bettina zu Besuch und möchte sie mit einem Obstsalat überraschen. Caroline fällt es schwer sich zu entscheiden, in welcher Reihenfolge sie das Obst für den Salat zubereitet.

- Caroline hat Pfirsiche, Orangen, Bananen und Weintrauben entdeckt. Wie viele Möglichkeiten hat sie, diese vier Obstsorten nacheinander zuzubereiten?
- Caroline bemerkt, dass auch noch Äpfel im Hause sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, das Obst nacheinander zuzubereiten?

Bevor Caroline mit der Arbeit begonnen hat, kommt ihre Freundin Bettina und sagt, dass sie nur Obstsalat mit drei Obstsorten mag. Da sie beide keine Lieblingsfrüchte haben, stehen sie nun vor der Entscheidung, drei der vorhandenen fünf Fruchtarten auszuwählen.

- Wie groß ist nun die „Qual der Wahl“ – also: Wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl haben sie? (Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle.)

3. Aufgabe

Ein Rechteck wächst. Am Anfang, sozusagen in der „nullten“ Stufe, hat das Rechteck die Seitenlängen 2 und 3 (siehe Abb. a). In der ersten Stufe ist es in jeder Richtung um 1 gewachsen (siehe Abb. b). Entsprechend wächst das Rechteck weiter – in der Abb. c ist die dritte Stufe gezeigt.

- Wie viele Quadrate enthält das Ausgangsrechteck?
- Wie viele Quadrate umfasst der Zuwachs von der nullten zur ersten Stufe? (Wir nennen diese Zahl z_1 .)
- Welchen Wert haben dann z_2 , z_3 und z_4 ?
- Was kannst du für die folgenden Stufen beobachten? Welchen Wert hat z_{11} ?

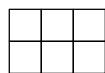


Abbildung a

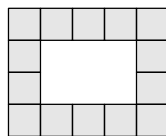


Abbildung b

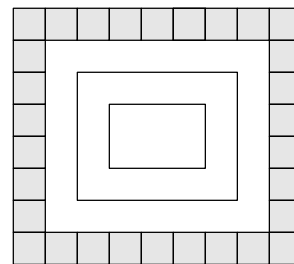


Abbildung c

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Ein Rechteck wächst. Am Anfang, sozusagen in der „nullten“ Stufe, hat das Rechteck die Seitenlängen 2 und 3 (siehe Abb. a). In der ersten Stufe ist es in jeder Richtung um 1 gewachsen (siehe Abb. b). Entsprechend wächst das Rechteck weiter – in der Abb. c ist die dritte Stufe gezeigt.

- Wie viele Quadrate enthält das Ausgangsrechteck?
- Wie viele Quadrate umfasst der Zuwachs von der nullten zur ersten Stufe? (Wir nennen diese Zahl z_1 .)
- Welchen Wert haben dann z_2 , z_3 und z_4 ?
- Was kannst du für die folgenden Stufen beobachten? Welchen Wert hat z_{11} ?

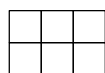


Abbildung a

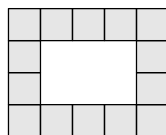


Abbildung b

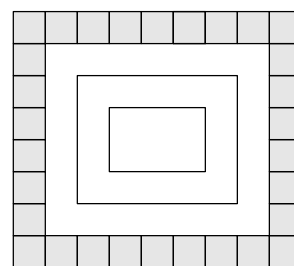
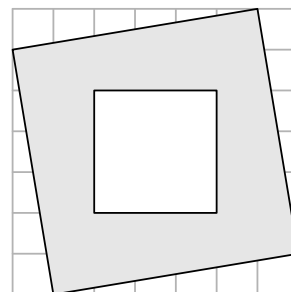
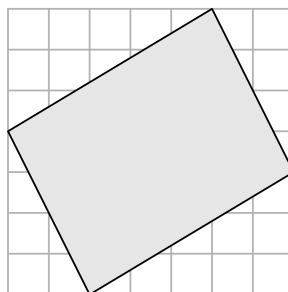


Abbildung c

2. Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es um ein Quadrat mit der Kantenlänge von sieben Einheiten. In dem Quadrat liegen grau gefärbte Parallelogramme so, dass ihre Spitzen die Quadratseiten berühren. Und dann können in den Parallelogrammen noch weiße Quadrate liegen.

- Welchen Flächeninhalt (in Einheitsquadraten) hat die graue Fläche links?
- Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche rechts?
- Gib eine auf die angegebene Weise erzeugte graue Fläche mit einem Flächeninhalt von 20 Einheitsquadraten an!



3. Aufgabe

Josephine hat fünf Freundinnen zu ihrem Geburtstag eingeladen. Sie verbringen den Nachmittag mit Spielen. Für das erste Spiel stellen die Mädchen sechs Stühle in einer Reihe auf.

- Wie viele verschiedene Möglichkeiten haben die Mädchen, sich in einer Reihe hinzusetzen?
- Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es, bei denen die Freundinnen Elke und Karin zusammensitzen?
- Für das nächste Spiel setzen sich die sechs Freundinnen um einen runden Tisch. Zwei Sitzordnungen sind gleich, wenn jedes Mädchen dieselben Nachbarinnen hat, und zwar auf jeder Seite. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun?
- Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es am runden Tisch, bei denen Elke und Karin nebeneinander sitzen können?
- Für das nächste Spiel braucht Josephine Zweiergruppen. Wie viele verschiedene Zweiergruppen können die sechs Mädchen bilden?

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Drei gleiche Lastkraftwagen sollen insgesamt 54 t Kies zu drei verschieden weit entfernten Baustellen fahren. Jeder LKW beliefert genau eine dieser Baustellen. Für die Belieferung (Hinfahrt, Abladen, Rückfahrt) der ersten Baustelle werden stets 12 Minuten benötigt, für die der zweiten Baustelle stets 20 Minuten und für die der dritten Baustelle jeweils eine halbe Stunde. Je Fahrt kann jeder Lkw 2,7 t transportieren.

Wie viele Tonnen Kies erhält jede Baustelle, wenn alle Lastwagen gleich lang unterwegs sind?

2. Aufgabe

Die Klassen 7a, 7b, 7c und 7d führen ein Tischtennisturnier durch. Der Schulleiter erkundigt sich am Ende nach dem Ausgang des Turniers. Einige Teilnehmer sind noch erschöpft und auch ein bisschen aufgeregt. Sie reden durcheinander. Armin, Beate und Carina meinen, Folgendes festgestellt zu haben:

Armin: Die 7c wurde Zweiter. Die 7d wurde Dritter.

Beate: Die 7c wurde Erster. Die 7b wurde Zweiter.

Carina: Die 7a wurde Erster. Die 7b wurde Vierter.

Manche Antworten widersprechen einander. Doch gibt jeder Turnierteilnehmer genau eine wahre und genau eine falsche Antwort.

- Ermittle die Platzierung der Klasse 7d!
- Kann der Direktor der Schule aus den gegebenen Informationen die wirkliche Reihenfolge der vier Klassen erschließen?

3. Aufgabe

An einen Kreis werden die Zahlen von 0, 1, 2, $\dots$, 9 in einer bestimmten Reihenfolge geschrieben.

Ist es möglich, sie so anzuordnen, dass je drei aufeinander folgende Zahlen höchstens den Summenwert a) 15 oder b) 14 haben? Die Antwort ist jeweils zu begründen.

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Es war schon im 16. Jahrhundert üblich, Geld für eine bestimmte Zeit gegen einen „Gewinn“ zu verleihen oder für Steuerschulden Zinsen zu verlangen. Bereits in einem Rechenbuch von Adam Ries findet sich ein Kapitel mit der Überschrift „Vom Gewinn nach der Zeit“. Es enthält zahlreiche Rechenaufgaben zur Verzinsung. Dabei wurde stets vorausgesetzt, dass eine bestimmte Geldmenge einen Gewinn erbringt, welcher proportional mit der Zeit anwächst.

Eine Aufgabe lautet: „Also: 12 Gulden gewinnen in 3 Jahren 7 Gulden. In wie viel Jahren würden 20 Gulden 12 Gulden gewinnen?“

- a) Bestimme die fragliche Ausleihzeit. Gib das Ergebnis in Jahren und Monaten (gerundet) an!
- b) Welcher Zinssatz ist damals zu Grunde gelegt worden? Vergleiche mit heute üblichen Zinssätzen. Was würdest du dazu sagen?

2. Aufgabe

Anton will zur Vorbereitung auf einen Mathetest eine bestimmte Anzahl von Aufgaben lösen. Auf die Frage, wie viele Übungsaufgaben er denn schon geschafft habe, antwortet er: „Die Anzahl der von mir bereits gelösten Aufgaben ist um 31 größer als die Anzahl der noch nicht gelösten. Wenn ich zur Anzahl der gelösten Aufgaben die doppelte Anzahl der von mir noch nicht gelösten Aufgaben addiere, so erhalte ich eine ganze Zahl, die kleiner als 100 ist. Addiere ich aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der noch nicht gelösten Aufgaben, bekomme ich eine Zahl, die größer als 45 ist“.

Ist durch diese Angaben die Anzahl der Aufgaben, die Anton durchrechnen möchte, eindeutig zu ermitteln? Wenn ja, wie groß ist diese Anzahl? Wenn nein, dann ermittle alle Aufgabenanzahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen!

3. Aufgabe

Über fünf Punkte A, B, C, D, E wird vorausgesetzt:

- (1) Die Punkte liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M .
 - (2) Der Mittelpunkt M liegt auf $\overline{AC}$.
 - (3) Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.
 - (4) Die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EA}$ sind gleich lang.
- a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke MCD , MDE und MEA kongruent sind!
 - b) Berechne die Größe der Winkel im Dreieck BCD !

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Für die Zahlen $x = \frac{49}{10}$ und $y = \frac{7}{5}$ gilt $x - y = \frac{x}{y}$.

- Finde drei weitere Paare **rationaler Zahlen** x und y , welche diese Gleichung erfüllen.
- Ermittle eine Bildungsvorschrift für alle Paare **rationaler Zahlen** $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.
- Bestimme alle Paare **positiver ganzer Zahlen** $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.

2. Aufgabe

Es sei n die natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung aus k Einsen besteht, also $n = \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ Ziffern}}$.

- Untersuche in Abhängigkeit von k , wie viele Stellen n^2 hat und mit welcher Ziffer n^2 beginnt.
- Wir stellen fest: $11^2 = 121$ und $111^2 = 12321$. Solche Zahlen, deren Dezimaldarstellung von vorn und von hinten gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt, nennen wir symmetrisch. Für welche Stellenzahlen k ist n^2 eine symmetrische Zahl?

3. Aufgabe

Auf einem Schachbrett sollen Läufer so aufgestellt werden, dass kein Läufer einen anderen bedroht, aber jedes der unbesetzten Felder von mindestens einem Läufer bedroht ist.

- Finde eine Aufstellung der geforderten Art mit 8 Läufern.
- Ermittle die maximale Anzahl m von Läufern, die man auf einem Schachbrett in der geforderten Art aufstellen kann.
- Untersuche, für welche Anzahlen n mit $8 < n < m$ es eine Aufstellung der geforderten Art mit n Läufern gibt.

Hinweis: Falls du dich über die möglichen Züge eines Läufers informieren möchtest:

www.deutsche-schachjugend.de/regeln/f-regeln.htm

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Für die Zahlen $x = \frac{49}{10}$ und $y = \frac{7}{5}$ gilt $x - y = \frac{x}{y}$.

- a) Finde drei weitere Paare **rationaler Zahlen** x und y , welche diese Gleichung erfüllen.
- b) Ermittle eine Bildungsvorschrift für alle Paare **rationaler Zahlen** $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.
- c) Bestimme alle Paare **positiver ganzer Zahlen** $(x; y)$ mit dieser Eigenschaft.

2. Aufgabe

Es sei n die natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung aus k Einsen besteht, also $n = \underbrace{11 \dots 11}_{k \text{ Ziffern}}$.

- a) Untersuche in Abhängigkeit von k , wie viele Stellen n^2 hat und mit welcher Ziffer n^2 beginnt.
- b) Wir stellen fest: $11^2 = 121$ und $111^2 = 12321$. Solche Zahlen, deren Dezimaldarstellung von vorn und von hinten gelesen dieselbe Ziffernfolge ergibt, nennen wir symmetrisch. Für welche Stellenzahlen k ist n^2 eine symmetrische Zahl?

3. Aufgabe

Die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks ABC seien ganzzahlig und Teiler seiner Umfangslänge U . Zeige, dass dieses Dreieck gleichseitig ist.

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als erste Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Das Produkt 4018020 der Jahreszahlen 2004 und 2005 des diesjährigen Wettbewerbs hat folgende besonderen Eigenschaften:

- (1) Es ist siebenstellig.
- (2) Die Endziffer ist Null.
- (3) Die in dieser Reihenfolge aus den ersten drei Ziffern gebildete Zahl ist genau halb so groß wie die aus den folgenden drei Ziffern gebildete Zahl.

a) Zeige, dass jede Zahl mit den obigen drei Eigenschaften durch 167 teilbar ist.

b) Man untersuche, ob es weitere Paare aufeinander folgender natürlicher Zahlen gibt, deren Produkt diese drei besonderen Eigenschaften besitzt, und bestimme gegebenenfalls alle derartigen Paare.

2. Aufgabe

Es sei $\overline{AB}$ Durchmesser eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r . Ferner sei P ein von A und B verschiedener Punkt auf dem Halbkreis $\widehat{BA}$ und Q der Mittelpunkt des Kreisbogens $\widehat{PA}$. Es sei g die Gerade, welche durch B und P verläuft. Die zu PQ parallele Gerade durch M schneide die Gerade g in R . Beweisen Sie, dass dann $|PR| = r$ gilt.

3. Aufgabe

Lisa und Mara spielen das Spiel der drei Springer. Es wird auf einem Schachbrett gespielt, auf dem sich zu Beginn drei Springer auf den Feldern h1, g2 und f3 befinden (siehe Abbildung A 441314a). Die Spielerinnen ziehen abwechselnd einen der Springer auf ein leeres Feld, wobei ein Springer anders als beim Schach nur die vier in der Abbildung A 441314b gezeigten Zugmöglichkeiten hat.

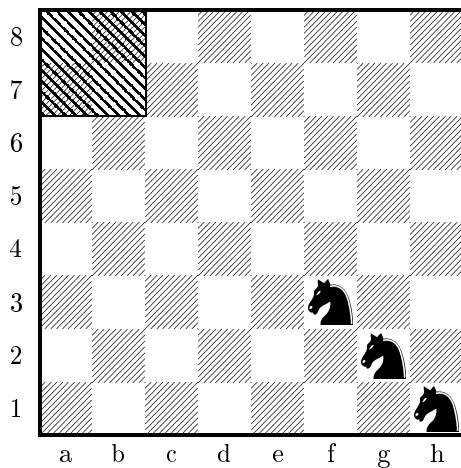


Abbildung A 441314 a

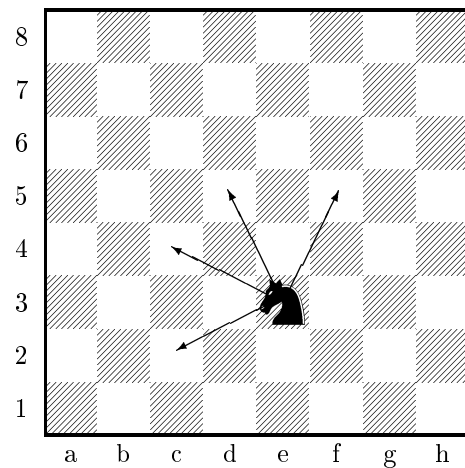


Abbildung A 441314 b

Ziel ist es, die Springer nach Hause zu bringen. Ein Springer ist zu Hause, wenn er auf einem der schraffierten Felder a8, b8, a7 oder b7 steht. Es gewinnt diejenige, die den dritten Springer nach Hause bringt. Tritt schon vorher die Situation ein, dass kein Zug mehr möglich ist, obwohl die drei Springer noch nicht alle zu Hause sind, so ist das Spiel unentschieden. Lisa beginnt.

Zeige: Egal wie Mara sich zur Wehr setzt, Lisa kann immer durch geschicktes Spiel gewinnen. Wie sieht eine Gewinnstrategie für Lisa aus, mit der sich der Sieg erzwingen läßt.