

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Die Familien Berger, Frärich, Köhler, Mikuscheit, Richter und Schulte wohnen in einer Sackgasse in einer Vorortssiedlung nebeneinander. Über die gegenseitige Lage ihrer Häuser ist folgendes bekannt:

- (1) Wenn Herr Frärich von der Arbeit kommt, muss er am Haus der Köhlers vorbei und klingelt dort, um seine Kinder abzuholen. Dann fährt er weiter in seine Garage, die zwischen seinem Haus und dem der Richters steht.
- (2) Frau Schulte hat es zu Frau Köhler und zu Frau Richter gleich weit.
- (3) Mikuscheits und Richters wohnen am weitesten auseinander.

Die Häuser tragen die Nummern 1 bis 6, und das Haus mit der Nummer 1 liegt am Anfang der Sackgasse.

Welche Familie hat welche Hausnummer?

Weise nach, dass sich aus den Bedingungen (1), (2) und (3) die Zuordnung zwischen den Familien und den Hausnummern eindeutig ableiten lässt!

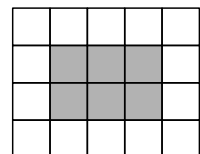
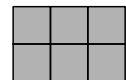
2. Aufgabe

- a) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 167. Die letzte Ziffer des größeren der beiden Summanden ist eine 2. Streicht man diese Ziffer 2, so erhält man den kleineren der beiden Summanden. Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe!
- b) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 525. Die letzte Ziffer des größeren der beiden Summanden ist eine 8. Streicht man diese Ziffer 8, so erhält man den kleineren der beiden Summanden. Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe!

3. Aufgabe

Anne legt ein Rechteck aus 2×3 gleich großen Quadraten. Dieses Rechteck nennen wir wieder das Rechteck der „nullten“ Stufe. Um dieses Rechteck legt sie eine Reihe Quadrate und erhält das Rechteck der ersten Stufe. Nun legt sie wieder eine Reihe Quadrate (das Rechteck der zweiten Stufe entsteht), usw.

- a) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der dritte Stufe?
- b) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der 20. Stufe? Ermittle das Ergebnis durch eine Rechnung!
- c) Anne stellt fest, dass es unter diesen Rechtecken eines gibt, das genau fünfmal so viele Quadrate enthält wie ein anderes. Für welche Rechtecke gilt dies?



20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Dominik bestaunt sein neues Fahrrad. Der Kilometerzähler zeigt grundsätzlich vier Stellen an (einschließlich der Ziffer 0).

Dominik denkt über besonders auffällige Ziffernfolgen nach, die bei seinem Kilometerzähler auftreten können.

- Wie oft zeigt der Zähler eine Zahl mit lauter gleichen Ziffern an?
- Wie oft stellt sich eine Zahl ein, bei der nur die erste und die dritte, sowie die zweite und die vierte Ziffern übereinstimmen?
- Wie oft kann Dominik eine Zahl mit lauter ungeraden Ziffern bestaunen? (Bedenke bitte, dass der Kilometerzähler führende Nullen immer mit anzeigt!)
- Wie oft zeigt sein Kilometerzähler eine Zahl mit genau zwei ungeraden Ziffern?

2. Aufgabe

Wenzel liest in einem vielbändigen Lexikon, das insgesamt 15 607 fortlaufend nummerierte Seiten hat, den Artikel über den Abakus (eine alte Rechenhilfe). Dieser Artikel steht auf drei Seiten.

Wenzel bemerkt: Wenn man zum Produkt der drei Seitenzahlen des Artikels eine 7 addiert, so ergibt sich gerade die Anzahl der Seiten des Lexikons.

Auf welchen Seiten steht der Artikel über den Abakus?

3. Aufgabe

- Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung a?
- Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung b?

Berechne den Flächeninhalt in Einheitsquadraten; die Einteilung der Zeichnungen zeigt diese Einheitsquadrate (EQ)

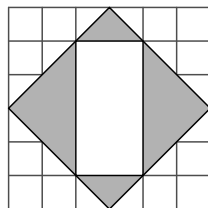


Abbildung a

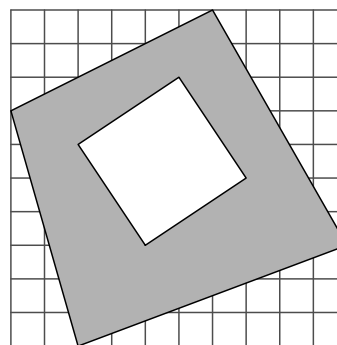


Abbildung b

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

- a) Bäckermeister Mohn hat 600 Brötchen gebacken. Sein erster Kunde kaufte $\frac{1}{25}$ dieser Brötchen; der zweite Kunde kaufte $\frac{1}{36}$ der jetzt noch vorhandenen Brötchen; der dritte Kunde kaufte $\frac{1}{28}$ und der vierte Kunde schließlich $\frac{1}{30}$ der jeweils noch vorhandenen Brötchen.
Wie viele Brötchen hatte der Bäckermeister danach noch zu verkaufen?
- b) Gegen Abend betraten die letzten vier Kunden den Laden. Scherzhaft sagt der Bäckermeister:
„Viele Brötchen habe ich ja nicht mehr. Wenn aber jeder von Ihnen ein Drittel der jeweils noch vorhandenen Brötchen nimmt, dann habe ich gerade noch 16 Brötchen übrig.“
Wie viele Brötchen hatte Meister Mohn noch, und wie viele Brötchen hätte jeder der vier Kunden nach seinem Vorschlag nehmen müssen? Weise durch eine Probe nach, dass die ermittelten Anzahlen alle gestellten Bedingungen erfüllen!

2. Aufgabe

Zwischen zwei Orten A und B verkehren zwei Triebwagenzüge der Deutschen Bahn AG. Zwischen den Orten A und B liegt der Ort C . Beide Züge halten dort jeweils 10 Minuten.

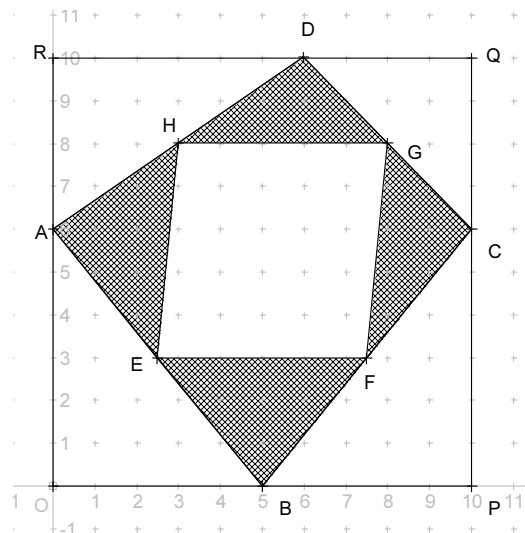
Beide Triebwagen fahren genau um 12.00 Uhr in A bzw. B ab, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Sie erreichen die Endstation B bzw. A zum gleichen Zeitpunkt und zwar genau um 13.31 Uhr. Die Entfernung der Orte A und C beträgt vier Fünftel der Entfernung der Orte B und C .

Untersuche, ob sich die Triebwagen im Ort C treffen, wenn vorausgesetzt wird, dass sie mit konstanter Geschwindigkeit fahren!

3. Aufgabe

Im nebenstehenden Bild ist in ein Koordinatensystem mit 1 cm Längeneinheiten das Quadrat $OPQR$ eingezeichnet: $O(0/0)$, $P(10/0)$, $Q(10/10)$, $R(0/10)$. Auf den Quadratseiten liegen die Viereckpunkte $A(0/6)$, $B(5/0)$, $C(10/6)$, $D(6/10)$. Die Seitenmittelpunkte von $ABCD$ begrenzen das Viereck $EFGH$.

- Ermittle die Koordinaten von E, F, G, H .
- Weise nach, dass $EFGH$ ein Parallelogramm ist.
- Berechne den Flächeninhalt der markierten Figur.



20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Beim Lichten eines Waldes wurden insgesamt 357 Bäume gefällt, und zwar Buchen, Tannen, Eichen, Lärchen und Ahornbäume.

Die Anzahl der Buchen ist $\frac{1}{3}$ der Anzahl der Tannen.

Die Anzahl der Eichen ist $\frac{3}{5}$ der Anzahl der Buchen.

Die Anzahl der Lärchen ist $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Eichen.

Die Anzahl der Ahornbäume ist $\frac{1}{4}$ der Anzahl der Lärchen.

Wie viele Bäume jeder Art wurden gefällt?

2. Aufgabe

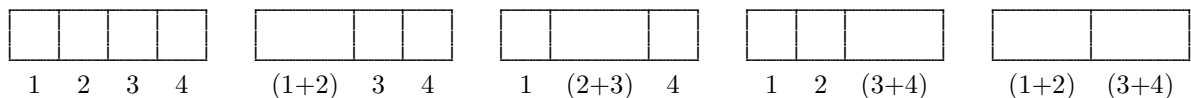
Über ein Fünfeck $ABCDE$ wird vorausgesetzt:

- (1) Alle Seiten des Fünfecks sind gleich lang.
- (2) Alle Winkel des Fünfecks sind gleich groß.
- (3) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ schneiden einander im Punkt F .

- a) Berechne die Größe der Innenwinkel eines solchen Fünfecks!
- b) Beweise, dass aus den Voraussetzungen folgt, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{FC}$ gleich lang sind!

3. Aufgabe

Folgende Abbildung zeigt die fünf Möglichkeiten, ein Rechteck mit der Breite 1 und der Länge 4 (also mit dem Inhalt 4) in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 aufzuteilen:



Jeder Rechteckgröße ordnen wir die Anzahl der Aufteilungsmöglichkeiten zu. Im Beispiel ist also $f(4) = 5$.

- a) Ermittle die Anzahl $f(5)$ aller Möglichkeiten, ein derartiges Rechteck mit dem Inhalt 5 in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 zu zerlegen!
- b) Ermittle $f(6)$ und $f(10)$!

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{xy} = 6$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \frac{x+y}{2}$.

2. Aufgabe

Laura und Markus spielen folgendes Spiel: Laura schreibt mindestens drei natürliche Zahlen hintereinander auf eine Tafel. Die erste und die letzte Zahl sind jeweils Null und alle anderen sind positiv. Die Summe aller auf die Tafel geschriebenen Zahlen wird mit S bezeichnet. Markus streicht nun eine an der Tafel stehende positive Zahl z durch; die Summe der links von z stehenden Zahlen sei L , die Summe der rechts von z stehenden Zahlen sei R . Markus hat gewonnen, wenn L und R beide nicht größer als $\frac{1}{2}S$ sind; sonst hat Laura gewonnen.

- Zeigen Sie, dass Markus immer gewinnen kann.
- Die Spielregeln werden dahingehend abgeändert, dass Markus genau dann gewonnen hat, wenn L und R beide kleiner als $\frac{1}{2}S$ sind. Kann Markus in diesem Fall immer gewinnen?

3. Aufgabe

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt:

Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $Q(n)$ beträgt 2004.

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem quadratischen Mittel $q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = 24$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \frac{x + y}{2}$.

2. Aufgabe

Laura und Markus spielen folgendes Spiel: Laura schreibt mindestens drei natürliche Zahlen hintereinander auf eine Tafel. Die erste und die letzte Zahl sind jeweils Null und alle anderen sind positiv. Die Summe aller auf die Tafel geschriebenen Zahlen wird mit S bezeichnet. Markus streicht nun eine an der Tafel stehende positive Zahl z durch; die Summe der links von z stehenden Zahlen sei L , die Summe der rechts von z stehenden Zahlen sei R . Markus hat gewonnen, wenn L und R beide nicht größer als $\frac{1}{2}S$ sind; sonst hat Laura gewonnen.

- Zeigen Sie, dass Markus immer gewinnen kann.
- Die Spielregeln werden dahingehend abgeändert, dass Markus genau dann gewonnen hat, wenn L und R beide kleiner als $\frac{1}{2}S$ sind. Kann Markus in diesem Fall immer gewinnen?

3. Aufgabe

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt:

Die Summe aus der Zahl n , ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2004.

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 11

1. Aufgabe

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n , für die gilt:

Die Summe aus der Zahl n , ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2004.

2. Aufgabe

Durch den Mittelpunkt M eines Kreises k gehe die Gerade g . Auf dem Kreis k liege der Punkt P so, dass die Tangente an k in P die Gerade g in einem Punkt S schneidet. Es sei V der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PS}$. Man beweise, dass das Lot von V auf die Gerade g keine inneren Punkte des Kreises k trifft.

3. Aufgabe

Zwei Freunde Andreas und Ben haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Gegeben sind die n Eckpunkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ eines regelmäßigen n -Ecks mit $n \geq 4$. Andreas und Ben zeichnen abwechselnd jeweils eine neue Strecke $A_i A_j$ ($i \neq j$), bis alle Kanten und Diagonalen eingezeichnet sind. Dabei benutzt Andreas die Farbe Blau und Ben die Farbe Rot. Andreas hat gewonnen, wenn am Ende des Spiels mindestens ein „einfarbiges Dreieck“ entstanden ist. Im anderen Fall hat Ben gewonnen.

Für welche n kann Andreas durch geeignete Spielweise den Gewinn erzwingen,

- a) falls Andreas die erste Verbindungsstrecke zeichnet,
- b) falls Ben die erste Strecke zeichnet?

Bemerkung: Unter einem „einfarbigen Dreieck“ verstehe man drei Punkte A_i, A_j, A_k mit $i < j < k$ so, dass die drei Strecken $A_i A_j$, $A_j A_k$ und $A_i A_k$ mit der gleichen Farbe gezeichnet sind.

20. Essener Mathematikwettbewerb 2004/2005

als zweite Runde der 44. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 12 - 13

1. Aufgabe

Durch den Mittelpunkt M eines Kreises k gehe die Gerade g . Auf dem Kreis k liege der Punkt P so, dass die Tangente an k in P die Gerade g in einem Punkt S schneidet. Es sei V der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PS}$. Man beweise, dass das Lot von V auf die Gerade g keine inneren Punkte des Kreises k trifft.

2. Aufgabe

Zwei Freunde Andreas und Ben haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Gegeben sind die n Eckpunkte $A_1, A_2, \dots, A_n$ eines regelmäßigen n -Ecks mit $n \geq 4$. Andreas und Ben zeichnen abwechselnd jeweils eine neue Strecke $A_i A_j$ ($i \neq j$), bis alle Kanten und Diagonalen eingezeichnet sind. Dabei benutzt Andreas die Farbe Blau und Ben die Farbe Rot. Andreas hat gewonnen, wenn am Ende des Spiels mindestens ein „einfarbiges Dreieck“ entstanden ist. Im anderen Fall hat Ben gewonnen.

Für welche n kann Andreas durch geeignete Spielweise den Gewinn erzwingen,

- a) falls Andreas die erste Verbindungsstrecke zeichnet,
- b) falls Ben die erste Strecke zeichnet?

Bemerkung: Unter einem „einfarbigen Dreieck“ verstehe man drei Punkte A_i, A_j, A_k mit $i < j < k$ so, dass die drei Strecken $A_i A_j$, $A_j A_k$ und $A_i A_k$ mit der gleichen Farbe gezeichnet sind.

3. Aufgabe

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{3+x}{6-x} + \frac{2+y}{9-y} = 0,$$

$$\frac{4+x}{9-y} + \frac{1+y}{6-x} = 0$$

sind.