21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

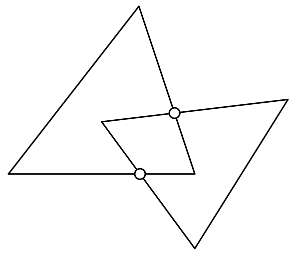
als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Die Abbildung zeigt zwei Dreiecke, die genau zwei Punkte gemeinsam haben. Kann man zwei Dreiecke so zeichnen, dass sie genau



a) einen Punkt,
b) drei Punkte,
c) vier Punkte,
d) fünf Punkte,
e) sechs Punkte,
f) sieben Punkte

gemeinsam haben?

Zeichne für die Fälle, die möglich sind, je ein Beispiel.

2. Aufgabe

Eine Treppe hat 12 Stufen. Auf jeder Stufe liegen viele Erbsen. Ganz oben wird eine Erbse in Bewegung gesetzt und rollt über die Kante. Jede Erbse, die einmal rollt, rollt bis ganz unten. Jedes Mal, wenn eine Erbse über eine Kante rollt, setzt sie auf der nächsten Stufe zusätzlich eine Erbse in Bewegung.

Wie viele Erbsen kommen insgesamt unten an?

3. Aufgabe

Ein Frosch sitzt an einem Ufer eines Bachs. Er will zum anderen Ufer, aber das ist viel zu weit weg für einen Sprung. Glücklicherweise liegen im Wasser hintereinander sechs Steine, die er als Zwischenstation verwenden kann. Nun kann er immer von einem Stein zum nächsten springen; er kann aber auch Sprünge auf den übernächsten und den über-übernächsten Stein machen. Allerdings schafft er nicht mehr als zwei von diesen langen Sprüngen, bei denen er einen oder zwei Steine auslässt.

Als einen „Weg“ bezeichnen wir eine Folge von Sprüngen. Wie viele verschiedene Wege gibt es für den Frosch über den Bach?

4. Aufgabe

René ist in einem Mathematik-Zirkel und denkt sich für die anderen eine Knobelaufgabe aus. Sie sollen die Buchstaben im Wort `MATHEMATIK` so durch Ziffern ersetzen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben sind durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
(2) Die zweistellige Zahl aus der 1. und 2. Ziffer ist fünfmal so groß wie die 3. Ziffer.
(3) Die zweistellige Zahl aus der 9. und 10. Ziffer ist um 25 größer als die zweistellige Zahl aus der 1. und 2. Ziffer.
(4) Die zweistellige Zahl aus der 4. und 5. Ziffer ist dreimal so groß wie die 9. Ziffer.
(5) Die 9. Ziffer ist ungerade.

Wie heißt die gesuchte Zahl?

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Wie viele verschiedene Schnittpunkte können folgende Figuren höchstens haben?

a) ein Kreis und zwei Geraden,
b) ein Kreis und ein Dreieck,
c) zwei Kreise und zwei Geraden,
d) drei Kreise und zwei Geraden.

Fertige dazu Zeichnungen an.

2. Aufgabe

Birka hat vier Karten mit den Ziffern 6, 7, 8 und 9. Sie möchte daraus dreistellige und vierstellige Zahlen bilden.

a) Wie viele solcher Zahlen kann sie insgesamt bilden? Wie viele sind davon vierstellig?
b) Gib von den dreistelligen Zahlen alle an, die durch 3 *und* durch 4 teilbar sind!
c) Gib unter den vierstelligen Zahlen die kleinste und die größte durch 8 teilbare Zahl an!

3. Aufgabe

Anne und David spielen mit Gummibärchen. Sie fangen damit an, dass sie 11 Gummibärchen vor sich auf den Tisch legen und jetzt abwechselnd am Zug sind.

Ein Zug besteht darin,

- entweder *ein* Gummibärchen vom Tisch zu nehmen
- oder *die Hälfte* der Gummibärchen, die auf dem Tisch liegen. (Wenn die Anzahl der Gummibärchen auf dem Tisch ungerade ist, geht dies nicht. In diesem Fall wird abgerundet: Zum Beispiel bei 9 Gummibärchen auf dem Tisch darf man nur vier nehmen.)

Wer das letzte Gummibärchen wegnehmen muss, hat verloren.

Anne fängt an. Kann sie den Sieg erzwingen? Oder kann David sicher gewinnen?

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Drei Freunde Hans, Karl und Peter fahren mit dem Rad von Lüneburg nach Winsen/Luhe, um dort an der Kletterwand zu klettern.

Hans fährt dabei in je 10 Minuten zwei Kilometer. Karl benötigt für je 2,5 Kilometer 10 Minuten, während Peter in je 10 Minuten 3 Kilometer zurücklegt und Winsen nach genau 100 Minuten erreicht.

Wie viele Minuten nach Peter treffen Hans und Karl in Winsen ein, wenn alle drei zur gleichen Zeit in Lüneburg abgefahren sind?

2. Aufgabe

Löse die folgende Aufgabe, die aus einem alten Rechenbuch stammt:

„Eine Griechin ging in den Tempel Jupiters und bat, er möge ihre Barschaft verdoppeln. Er tat es und sie opferte zum Dank drei Drachmen. Dann ging sie in den Tempel Apollos und brachte die gleiche Bitte vor. Weil sie Erhörung fand, opferte sie wieder drei Drachmen. Nun besaß sie zweiundeinhalb-mal so viel Geld wie anfangs. Wie viele Drachmen hatte sie anfangs?“

3. Aufgabe

Sieh in einem Mathematikbuch oder einem Lexikon nach, was ein gleichschenkliges Dreieck und was ein rechtwinkliges Dreieck ist. Bearbeite dann die folgenden Aufgaben:

a) In einem Rechteck ist die eine Seite doppelt so lang wie die andere. Zerlege das Rechteck in 4 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke.

b) Ein Quadrat soll in 12 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerschnitten werden. Dabei soll von dem Quadrat nichts übrig bleiben. Wie ist das möglich?

c) Wie lässt sich das Quadrat aus der Teilaufgabe b) in 10 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerlegen?

d) Wie lässt sich das Quadrat aus der Teilaufgabe b) in 11 gleichschenklige, nicht rechtwinklige Dreiecke zerlegen?

Als Lösungen sind Zeichnungen anzugeben.

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Eine Aufgabe von Leonhard Euler aus dem Buch „Vollständige Anleitung zur Algebra“:

Zwei Bäuerinnen haben zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier in 8-er-Kartons packe, so bleiben 7 übrig.“ Die zweite sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier in 10-er-Kartons packe, so bleiben mir auch 7 übrig.“

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben ermitteln lässt, wie viele Eier jede der beiden Bäuerinnen hat!

Wenn dies nicht der Fall ist, dann füge selber eine Bedingung hinzu, damit die Aufgabe eindeutig lösbar wird!

2. Aufgabe

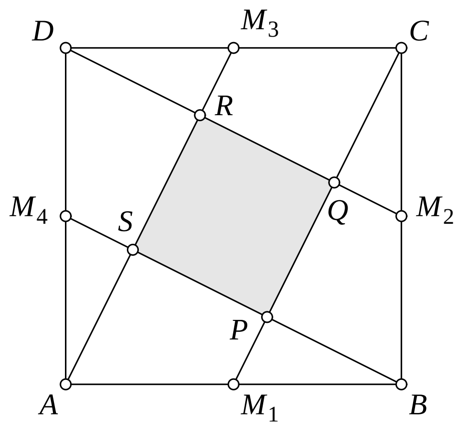
Die Zahl 45 ist in vier Summanden zu zerlegen, für die Folgendes gilt: Addiert man zum ersten Summanden 2, subtrahiert man vom zweiten Summanden 2, multipliziert man den dritten Summanden mit 2, dividiert man den vierten Summanden durch 2, so erhält man stets die gleiche Zahl.

Wie lauten die vier Summanden?

3. Aufgabe

Wir betrachten ein Quadrat $ABCD$. Seine Eckpunkte sind mit den Seitenmittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 so verbunden, wie in der Abbildung angegeben. Weise nach, dass das so entstandene Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist.

Ermittle, in welchem Verhältnis der Flächeninhalt von $PQRS$ zum Flächeninhalt von $ABCD$ steht!



21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Aus der Menge M der natürlichen Zahlen von 1 bis 120 wählt man 13 Zahlen, welche paarweise verschieden sind, aus.

a) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, die sich um höchstens 9 unterscheiden.

b) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, deren Differenz ein Vielfaches von 10 ist.

c) Kann man bei b) mit weniger als 13 auszuwählenden Zahlen auskommen?

2. Aufgabe

Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen gibt es, deren letzte Ziffer eine 4 ist und die durch 6 teilbar sind?

3. Aufgabe

Es seien x, y reelle Zahlen mit $y \geq 0$ und $y \cdot (y+1) \leq (x+1)^2$. Zeigen Sie, dass dann $y \cdot (y-1) \leq x^2$ gilt.

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klasse 10

1. Aufgabe

Aus der Menge M der natürlichen Zahlen von 1 bis 120 wählt man 13 Zahlen, welche paarweise verschieden sind, aus.

a) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, die sich um höchstens 9 unterscheiden.

b) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, deren Differenz ein Vielfaches von 10 ist.

c) Kann man bei b) mit weniger als 13 auszuwählenden Zahlen auskommen?

2. Aufgabe

Peter versucht spitzwinklige Dreiecke zu finden, mit denen sich ein weiteres Dreieck zusammenlegen lässt. Nach vielen Versuchen meint er: „Mit 4 Dreiecken kann man die Aufgabe lösen, mit weniger als 4 Dreiecken aber nicht.“ Hat Peter recht?

3. Aufgabe

Es seien x, y reelle Zahlen mit $y \geq 0$ und $y \cdot (y+1) \leq (x+1)^2$. Zeigen Sie, dass dann $y \cdot (y-1) \leq x^2$ gilt.

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als erste Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man ermittle alle im Dezimalsystem 8-stelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die aus den ersten vier Ziffern gebildete Zahl ist dreimal so groß wie die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl.

(2) Die Zahl ist gerade.

(3) Die sechste Ziffer der Zahl ist gleich der zweiten Ziffer.

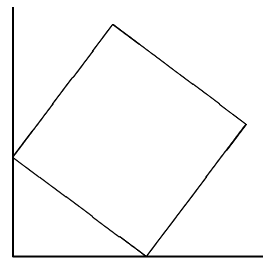
(4) Die Zahl ist durch fünf teilbar.

(5) Die siebente Ziffer der Zahl ist doppelt so groß wie die dritte Ziffer.

Die Zählung der Stellen erfolgt dabei von links nach rechts, die erste Ziffer wird als von Null verschieden vorausgesetzt.

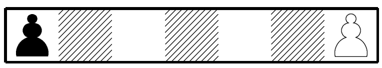
2. Aufgabe

Im Wirtshaus „Zur lustigen Fliege“ werden Koordinaten in Bierdeckeleinheiten gemessen. In der Ecke eines Tisches liegt ein quadratischer Bierdeckel mit der Kantenlänge 1. Ein Gast bewegt diesen so, dass zwei benachbarte Ecken entlang der beiden Tischkanten gleiten (vgl. Abbildung). Kann eine im Punkt $F(0{,}8; 1{,}4)$ sitzende Fliege bei dieser Bewegung getroffen werden?



3. Aufgabe

Wiebke und Stefan trainieren für Northcotts Spiel. Dazu zeichnen sie nebeneinander eine Reihe von Quadraten und stellen einen schwarzen Stein auf das erste Feld sowie einen weißen auf das letzte. Die Abbildung zeigt die Ausgangsstellung für eine Reihe von sieben Quadraten.



Gezogen wird abwechselnd. Ein Zug besteht darin, den eigenen Spielstein um ein Feld oder um zwei Felder vorwärts oder rückwärts zu versetzen, ohne den gegnerischen Spielstein zu überspringen. Wiebke führt den weißen Stein und beginnt. Verloren hat derjenige, der keinen Zug mehr machen kann.

Man untersuche, ob einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen kann, und beschreibe, auf welche Weise dies möglich ist.