21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Nach dem Abschluss eines Sportfests vergleichen Arne, Bert, Carsten, Daniel, Erik und Felix ihre Ergebnisse im Hochsprungwettbewerb. Dabei stellten sie fest:

(1) Bert sprang höher als Daniel.
(2) Erik sprang höher als Bert.
(3) Arne war in der Endwertung unmittelbar vor Felix.
(4) Daniel blieb länger im Wettbewerb als Carsten.
(5) Felix ist vor Carsten ausgeschieden.

a) Bestimme aus diesen Angaben die Reihenfolge der sechs Jungen beim Hochsprung!

b) Die Ergebnisliste sagt aus, dass Arne, Bert und Carsten zusammen genauso hoch gesprungen sind wie Daniel, Erik und Felix zusammen. Der Schiedsrichter ist sich aber nicht ganz sicher, ob die Liste stimmt, er weiß aber genau, dass jeder der Schüler eine andere Höhe erreicht hat.
Zeige, dass die Aussage der Ergebnisliste stimmen kann, indem du für jeden der Schüler eine passende Höhe angibst!

2. Aufgabe

Eine alte Aufgabe lautet:

Wenn man ein Kilogramm Rosenöl herstellen will, dann benötigt man dazu eine halbe Tonne an Rosenblüten. Zur Herstellung von einem Liter Parfüm braucht man zwölf Tropfen Rosenöl. Dabei wiegen 36 Tropfen Rosenöl genau ein Gramm.

Auf den Feldern von Moldawien wurden 1500 kg Rosenblüten geerntet. Wie viel Liter Parfüm kann man daraus herstellen?

Hinweis: Berechne zunächst, wie viele Liter Parfüm man mit einem Kilogramm Rosenöl herstellen kann!

Zu den Einheiten: Ein Kilogramm hat 1000 Gramm (1 kg = 1000 g). Eine Tonne hat 1000 Kilogramm (1 t = 1000 kg).

3. Aufgabe

Du siehst in der Abbildung a drei Stufen einer Entwicklung, in der immer größere Quadrate gefärbt werden. (Die Seitenlänge wächst immer um 2 Kästchen.)

a) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitsquadrate enthält die vierte Stufe?

b) Wie viele Einheitsquadrate umfasst die Gesamtfläche des Quadrats in der siebenten Stufe, und wie viele graue und weiße Einheitsquadrate sind hier vorhanden?

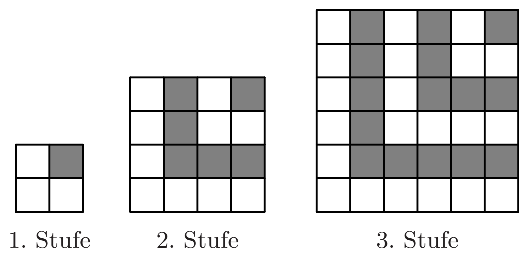


Abbildung a

Nun betrachten wir das Entsprechende im Raum. In der ersten Stufe beginnen wir mit dem kleinen Würfel (1. Stufe), der in Abbildung b gezeigt ist. Angebaut wird immer auf den drei Seiten, die dem einzelnen grauen Würfel vom Anfang gegenüberliegen, also auf der linken Seite, hinten und oben. In einer Stufe wird immer erst eine Schicht grauer Würfel angeklebt, dann eine Schicht weißer Würfel. Der so erzeugte Würfel der 2. Stufe ist ebenfalls in Abbildung b zu sehen.

c) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitswürfel bilden den Würfel der 2. Stufe?

d) Wie viele graue und wie viele weiße kleine Einheitswürfel bilden den Würfel der 3. Stufe?

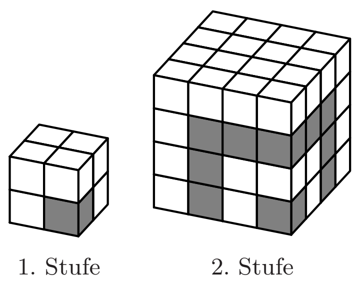


Abbildung b

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Frank fragt Jan, wie viele Schüler in seiner Klasse sind. Jan antwortet nicht ganz direkt:

„Multipliziert man die Schülerzahl in meiner Klasse mit 5, so ist die Quersumme dieses Produktes doppelt so groß wie die Quersumme der Schülerzahl. Außerdem ist das Produkt durch 6 teilbar. Ach ja, in meiner Klasse können 26 Schüler Rad fahren und 12 Schüler schwimmen, und jeder Schüler kann mindestens eins von beidem.“

Wie viele Schüler sind in Jans Klasse?

2. Aufgabe

Samuel und seine vier Freunde sitzen im Strandbad nebeneinander und haben vor sich die folgenden Getränke hingestellt:

Cola	Fanta	Limo	Apfelsaft	Wasser

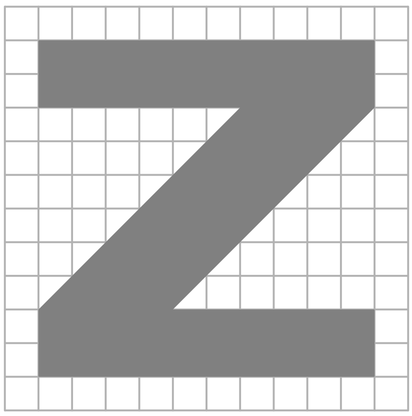
Folgende Sachverhalte sind bekannt:

(1) Tobias sitzt neben dem Limo-Trinker.
(2) Mario hat nur einen Nachbarn und ein farbiges Getränk.
(3) Frank trinkt keine Limo.
(4) Robert hat einen der beiden Außenplätze.
(5) Tobias isst gerne Äpfel, trinkt aber nicht den Apfelsaft.

Wer sitzt wo und trinkt welches Getränk?

3. Aufgabe

a) Bestimme den Flächeninhalt des gezeigten Buchstabens Z in den unterlegten (quadratischen) Flächeneinheiten!
b) Zerlege das Z so in sechs Teilflächen, dass du daraus ein flächengleiches Quadrat zusammenlegen kannst!



21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

a) Martin hat fünf Kugeln: eine blaue, zwei rote und zwei weiße. Er will die Kugeln so auf zwei Schalen verteilen, dass in einer Schale zwei und in der anderen drei Kugeln liegen. In beiden Schalen sollen dabei mindestens zwei Kugeln unterschiedliche Farbe haben.
Schreibe alle Möglichkeiten für eine derartige Verteilung auf!

b) Martina hat neun Kugeln: drei blaue, drei rote und drei weiße. Sie verteilt ihre Kugeln auf drei Schalen. In die erste legt sie zwei Kugeln, in die mittlere drei und in die letzte vier. In jeder Schale sollen aber mindestens zwei Kugeln verschiedenfarbig sein.
Wie viele unterschiedliche Verteilungen sind jetzt möglich?

Hinweis: Beachte, in dieser Aufgabe sind Kugeln gleicher Farbe nicht unterscheidbar!

2. Aufgabe

Als der 7-jährige Carl Friedrich Gauß, der später „Fürst der Mathematik“ genannt wurde, auf seiner Schiefertafel die lange Rechnung $1+2+3+4+\cdots+99+100$ ausführen, d. h. die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen berechnen sollte, schrieb er nach kurzem Nachdenken 5050 als Ergebnis auf. Er hatte die Summanden geschickt zusammengefasst:

$$\begin{aligned}1+2+3+4+\cdots+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)\\ &= 101+101+\cdots+101 \qquad \text{(50 Summanden)}\\ &= 50\cdot 101\\ &= 5050.\end{aligned}$$

Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik veranstalten ein Wettrechnen. Sie wollen ohne Verwendung von Taschenrechnern ähnlich wie Gauß Summenwerte ermitteln. Es werden folgende Aufgaben gestellt:

a) Berechne die Summe der geraden Zahlen von 2 bis 100 !

b) Berechne die Summe der ungeraden Zahlen von 5 bis 2005 !

c) Berechne die Summe mit dem ersten Summanden 533 und dem letzten Summanden 866, wobei die Differenz zweier aufeinander folgender Summanden stets 3 beträgt!

Hinweis: Bei der Lösung der Aufgabe muss erkennbar sein, dass kein Taschenrechner benutzt worden ist.

3. Aufgabe

Ein Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C und D hat die Seitenlänge 54 mm. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ heißen H bzw. K.

a) Begründe, warum die Dreiecke ABH, AHC, ACK und AKD den gleichen Flächeninhalt F haben!

b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck HKA?

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

a) Marie geht einkaufen. Ihre Mutter gibt ihr dazu etwas Geld mit. Marie bezahlt für Wurstwaren an der Theke 30 %, für Milch 5 % und für Obst und Gemüse 35 % des ihr zur Verfügung stehenden Betrags. Zu Hause erhält Marie von der Mutter ein Drittel des Restbetrags als Taschengeld. Das sind 1,42 €. Wie viel Geld hatte Marie ursprünglich dabei?

b) Marie und ihr Bruder Robert vergleichen den Inhalt ihrer Sparbüchsen: 18 % von Roberts Ersparnissen ergeben denselben Geldbetrag wie 45 % des Gesparten von Marie. Wenn Robert ein Viertel so viel ausgäbe, wie Marie gespart hat, dann blieben ihm noch 146,25 € in seiner Büchse. Wie viel Geld haben Marie und Robert jeweils gespart?

2. Aufgabe

Alfons und Bertram spielen mit einer 5-Cent-Münze und einem Würfel. Als zufällig die „5“ auf der Münze und auch auf dem Würfel erscheint, fängt Alfons zu Grübeln an: „Tritt die Zahl 5 häufiger beim Werfen der Münze oder beim Würfeln auf?“ Bertram meint: „Sicherlich wird die Münze öfter mit der Zahl 5 nach oben auftreffen, da es ja nur zwei Möglichkeiten gibt“. „Dann müsste man den Würfel eben mehrmals nacheinander werfen dürfen“, sagt Alfons.

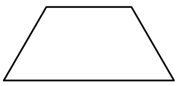
Beide vereinbaren schließlich das folgende Spiel: Alfons wirft die Münze einmal, Bertram würfelt dreimal hintereinander. Gewinnen soll, wer mindestens eine „Fünf“ wirft.

Ermittle die Gewinnchancen und entscheide, ob die vereinbarte Regel für Alfons oder für Bertram vorteilhafter ist!

3. Aufgabe

Ein Künstler soll in einer Eingangshalle einen Mosaikboden gestalten. Das Muster, das er auf den Boden legen will, besteht aus gleichseitigen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen n, gemessen in cm. Der Künstler experimentiert zunächst mit lauter gleichen, kleineren Mosaiksteinen in Form gleichseitiger Dreiecke mit Seitenlänge 1 cm, die er vorher auf Papier zeichnet. Ein größeres gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge n cm soll dabei vollständig und lückenlos mit den kleineren Mosaiksteinen ausgelegt werden.

a) Wie viele kleine Mosaiksteine braucht der Künstler für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5?
Stelle eine Vermutung für die Anzahl benötigter Mosaiksteine auf, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist und begründe deine Vermutung!



b) Den Künstler befriedigen seine ersten Zeichenversuche aus ästhetischen Gründen noch nicht. Er hat auch viele gleiche trapezförmige Mosaiksteine zur Verfügung und will mit ihnen gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge n cm vollständig und lückenlos auslegen (parkettieren). Jeder Trapezstein hat die Form wie in der Abbildung mit den Kantenlängen 1 cm, 1 cm, 1 cm sowie 2 cm. Zeichne eine mögliche Parkettierung für $n = 3$!

c) Gibt es jeweils Parkettierungen mit Trapezsteinen für $n = 4$ und $n = 5$?
Welche Seitenlängen sind für das gleichseitige Dreieck nur möglich? Begründe auch hier deine Antwort!

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

2. Aufgabe

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}\,?$$

3. Aufgabe

In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks $A_1A_2\ldots A_6$ mit dem Flächeninhalt A schneiden die sechs Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_6}$, $\overline{A_5A_1}$ und $\overline{A_6A_2}$ ein kleineres Sechseck $B_1B_2\ldots B_6$ mit dem Flächeninhalt B aus.

Berechnen Sie den Flächeninhalt B in Abhängigkeit von A.

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 10

1. Aufgabe

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

2. Aufgabe

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a+\frac{1}{b}\right)\cdot\left(b+\frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}\,?$$

3. Aufgabe

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen z größer als 9, für die gilt: Wenn man die erste Ziffer von z wegstreicht, erhält man $\frac{z}{57}$.

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 11

1. Aufgabe

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{|x^2-1|}{x-2} = x$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Man beweise, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 eine Quadratzahl ergibt.

3. Aufgabe

Zwei Rechtecke verschiedener Größe haben das gleiche Seitenverhältnis. Sie liegen so übereinander, dass auf dem Inneren jeder Seite des größeren Rechtecks ein Eckpunkt des kleineren Rechtecks liegt. Für welche Seitenverhältnisse ist dies möglich?

21. Essener Mathematikwettbewerb 2005/2006

als zweite Runde der 45. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 12-13

1. Aufgabe

Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{|\ x^2 - 1\ |}{x - 2} = x$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Man beweise, dass die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 eine Quadratzahl ergibt.

3. Aufgabe

Zwei Rechtecke verschiedener Größe haben das gleiche Seitenverhältnis. Sie liegen so übereinander, dass auf dem Inneren jeder Seite des größeren Rechtecks ein Eckpunkt des kleineren Rechtecks liegt. Für welche Seitenverhältnisse ist dies möglich?

4. Aufgabe

Stefan und Wiebke spielen Northcotts Spiel. Es wird auf einem Schachbrett gespielt, auf dem sich in jeder waagerechten Reihe je ein schwarzer und ein weißer Spielstein befinden. Gezogen wird abwechselnd, wobei Wiebke die weißen und Stefan die schwarzen Steine führt. Ein Zug besteht darin, einen Spielstein innerhalb seiner Reihe beliebig zu versetzen, ohne den gegnerischen Spielstein zu überspringen. Verloren hat derjenige, der keinen Zug mehr machen kann.

Welcher der beiden Spieler kann den Sieg erzwingen, wenn die Spielsteine wie in der Abbildung gezeigt aufgestellt sind und Wiebke am Zug ist?