# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde

## Klasse 5

### 1. Aufgabe

Setze folgende Zahlenreihen fort, indem du die Zahlen auf den freien Plätzen hinschreibst und angibst, wie du die Zahlen gefunden hast und wie du die nächsten Zahlen finden würdest.

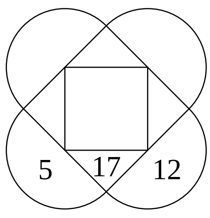
| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 6 | 5 | 7 | 4 | 8 | 3 | 9 | 2 | ____ | ____ | ____ |
| b) | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 9 | 13 | 14 | ____ | ____ | ____ |
| c) | 3 | 3 | 4 | 8 | 10 | 30 | 33 | 132 | ____ | ____ | ____ |
| d) | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | ____ | ____ | ____ |
| e) | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | ____ | ____ | ____ |
| f) | 2 | 4 | 8 | 3 | 9 | 27 | 4 | 16 | ____ | ____ | ____ |

### 2. Aufgabe

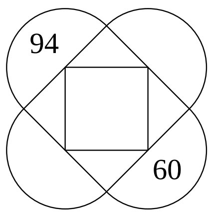
In den dargestellten Figuren in Abbildung werden Zahlen eingetragen. Man beginnt im linken unteren Halbkreis und vergrößert die Zahlen in den Halbkreisen entgegen dem Uhrzeigersinn jeweils um den gleichen Betrag.

In jedes Dreieck kommt die Summe der Nachbarzahlen. In der Mitte steht die Summe der vier Zahlen aus den Dreiecken.

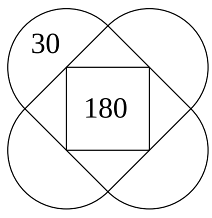
a) Ergänze entsprechend der Vorschrift die Zahlen in den leeren Feldern der Figur 1!
b) Ergänze entsprechend der Vorschrift die Zahlen in den leeren Feldern der Figur 2!
c) Bilde bei den Figuren 1 und 2 die Summe der Zahlen aus den Halbkreisen und vergleiche sie mit der Zahl in der Mitte. Erkennst du einen Zusammenhang? Wenn ja, dann beschreibe ihn!
d) Ergänze entsprechend der Vorschrift die Zahlen in den leeren Feldern der Figur 3!



Figur 1



Figur 2



Figur 3

### 3. Aufgabe

Die sieben Zwerge kommen zu Schneewittchen.

- „Ich habe dir Pilze mitgebracht," sagt der erste Zwerg.
- „Oh ja, ich auch, und ich habe dir sogar zwei Pilze mehr mitgebracht," sagt der zweite Zwerg.
- Der dritte Zwerg hat drei Pilze mehr mitgebracht als der zweite,
- der vierte vier Pilze mehr als der dritte,
- der fünfte fünf mehr als der vierte,
- der sechste sechs mehr als der fünfte.
- Der siebente Zwerg bringt Schneewittchen eine blaue Blume, keine Pilze.

„Das macht nichts," sagen die Zwerge. „Wenn wir alle unsere Pilze zusammen tun und dann gleichmäßig auf uns sieben Zwerge verteilen, dann kannst du Schneewittchen auch 26 Pilze geben."

Wie viele Pilze hatte der erste Zwerg gesammelt?

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde

## Klasse 6

1. Aufgabe

Eine Ameise läuft auf Gitterlinien von $A$ nach $B$. Von einem Gitterpunkt zum nächsten ist es immer ein Meter.

Bestimme, wie weit die Ameise mindestens laufen muss, und wie viele verschiedene Wege mit dieser kürzesten Länge sie zur Verfügung hat.

a) Sie läuft auf dem Quadrat in Abbildung a.

b) Sie läuft auf dem Rechteck in Abbildung b.

c) Sie läuft auf dem Würfel in Abbildung c.

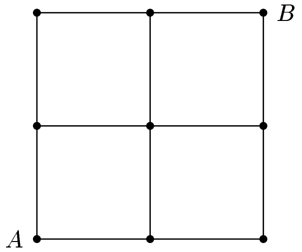



Abbildung a

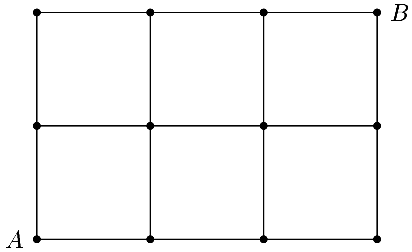



Abbildung b

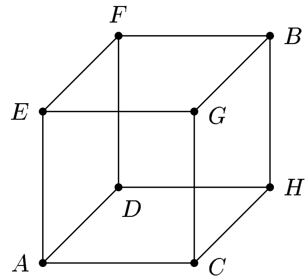



Abbildung c

2. Aufgabe

Im Lande Senturien gibt es nur Münzen zu 5 Sent und zu 7 Sent.

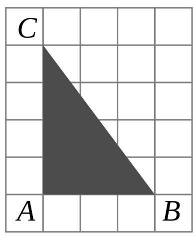
Offensichtlich ist der kleinste Preis überhaupt, den man bezahlen kann, ohne Rückgeld zu erhalten, 5 Sent, dann kommen 7 Sent und dann 10 Sent. Wir bleiben bei dieser Aufgabe bei der Situation, dass man beim Bezahlen keine Münzen zurückerhält.

a) Man kann in Senturien keine Preise von 6 Sent oder von 8 Sent oder 9 Sent bezahlen. Gib für alle Preise bis 36 Sent an, ob man sie bezahlen kann oder nicht.

b) Gibt es höhere Preise als 36 Sent, die man nicht bezahlen kann? Begründe deine Antwort.

c) Welches ist der kleinste Preis, den man auf zwei Arten (also mit zwei verschiedenen Kombinationen von Münzen) mit diesen Münzen bezahlen kann?

3. Aufgabe




Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$, wie in der nebenstehender Abbildung zu sehen ist. Dieses wird jeweils viermal in Uhrzeigerrichtung um 90° um einen vorgegebenen Punkt gedreht. Die neu entstandenen Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn fortlaufend bezeichnet.

Zuerst wird das Dreieck $ABC$ nach der oben genannten Vorschrift um $B$ gedreht, das neue Dreieck heißt dann $BDE$. Dieses Dreieck $BDE$ wird nun entsprechend um $D$ gedreht, das neu entstandene Dreieck heißt $DFG$. Das Dreieck $DFG$ wird um $G$ gedreht. Das neue entstandene Dreieck heißt $CHG$, weil ein Eckpunkt dieses Dreiecks auf den Punkt $C$ des ersten Dreiecks abgebildet wird.

a) Führe diese Konstruktion für das vorgegebene Dreieck aus.

b) Es entsteht ein Streckenzug $ABEDFGHCA$. Wie lang ist dieser Streckenzug?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt der vom Streckenzug eingeschlossenen Fläche? Gib ihn in Einheitsquadraten an!

d) Vergleiche den Flächeninhalt der umrandeten Figur mit dem Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks $ABC$!

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde
## Klasse 7

1. Aufgabe

Die Fußballmannschaften des Nordgymnasiums und des Südgymnasiums trugen zwei Freundschaftsspiele aus, wobei insgesamt 13 Tore geschossen wurden. Das erste Spiel endete unentschieden. Im zweiten Spiel fielen mehr Tore als im ersten Spiel, und zwar erzielte die Mannschaft des Nordgymnasiums im zweiten Spiel doppelt so viele Tore wie die Mannschaft des Südgymnasiums.

a) Wie endeten die beiden Spiele?

b) Untersuche, ob diese Aufgabe auch dann eindeutig lösbar ist, wenn man nicht weiß, dass im zweiten Spiel mehr Tore als im ersten Spiel fielen.

2. Aufgabe

Ein Wanderer und ein Radfahrer kommen auf einer Straße einander entgegen. Der Wanderer hat eine mittlere Geschwindigkeit von 4,5 Kilometer in einer Stunde, der Radfahrer ist fünfmal so schnell.

Die beiden sind jetzt 2,7 Kilometer voneinander entfernt. Wie viel Zeit vergeht, bis sie wieder 2,7 Kilometer voneinander entfernt sind?

3. Aufgabe

Wie viele natürliche Zahlen $n$ mit $1 \leq n \leq 2006$ erfüllen die Gleichung

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4}\,?$$

*Hinweis*: Dabei bedeutet $[x]$ die so genannte Gauß-Klammer von $x$: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$.

Beispiele: $[7] = 7$, $[0{,}99] = 0$, $[556{,}01] = 556$.

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde

## Klasse 8

1. Aufgabe

Wenn in einen Wasserbehälter in jeder Minute 4 Liter Wasser fließen, so werden nach einer gewissen Zeit $t$ noch 60 Liter fehlen, bis der Wasserbehälter voll ist. Wenn dagegen pro Minute 6 Liter hineinfließen, so werden nach derselben Zeit schon 10 Liter übergelaufen sein.

Wie viel Liter fasst der Wasserbehälter?

2. Aufgabe

Die Oberflächeninhalte zweier Würfel mit ganzzahligen Kantenlängen, von denen der größere eine um 22 cm längere Kante als der kleinere hat, unterscheiden sich um $19\,272\,\mathrm{cm}^2$ voneinander.

a) Berechne die Länge der Kanten der beiden Würfel.

b) Ermittle alle Lösungen, wenn man die Bedingung weglässt, dass die Differenz der Kantenlängen 22 cm betragen soll.

*Hinweis*: Drücke die Länge der einen Würfelkante mit Hilfe der Länge der zweiten aus und informiere dich in einer mathematischen Formelsammlung oder im Internet über Umformungen von binomischen Formeln.

3. Aufgabe

Es sei $ABCD$ ein Viereck, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $ABCD$ ist ein Drachenviereck (mit der Symmetrieachse $AC$).

(2) Die Diagonale $\overline{AC}$ hat eine Länge von 7 cm.

(3) Der Winkel $\sphericalangle BAD$ ist $60°$ groß.

(4) Die Summe der Seitenlängen von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ beträgt 10 cm.

a) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt.

b) Beschreibe deine Konstruktion.

*Hinweis*: Überzeuge dich, dass die Aufgabe viel leichter wird, wenn man die Bedingung (4) durch folgende Bedingung (4′) ersetzt:

(4′) Die Seite $\overline{AB}$ ist 6 cm lang.

Die Schwierigkeit unserer Aufgabe liegt darin, dass keine der Streckenlängen $|AB|$ oder $|BC|$, sondern nur deren Summe gegeben ist. In einem solchen Fall ist es günstig, eine Hilfsstrecke mit dieser Länge einzuführen, die als Seite eines Hilfsdreiecks vorkommt, das sich konstruieren lässt. Überlege dann, an welcher Stelle dieser Hilfsstrecke der Länge $|AB| + |BC|$ der Punkt $B$ liegen muss.

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde

## Klasse 9

1. Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass $1 \cdot 15 + 1$, $11 \cdot 105 + 1$ und $111 \cdot 1005 + 1$ Quadratzahlen sind.

b) Es sei $n$ eine natürliche Zahl mit $n > 0$. Des Weiteren seien $a = 11\ldots1$ die Zahl, deren Ziffernfolge aus $n$ Einsen besteht, und $b = 10\ldots05$ die Zahl, deren Ziffernfolge aus einer Eins, $n-1$ Nullen und einer Fünf besteht.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen $a \cdot b + 1$ eine Quadratzahl ist.

2. Aufgabe

Bernd ist krank und muss Tabletten nehmen. Diese sind in einer mit Alufolie verschlossenen Palette enthalten, welche die Form eines Rechteckes aus $5 \times 2$ Quadraten hat. In jedem Quadrat befindet sich eine Tablette. Als er von den 10 Tabletten die vierte entnommen hat, überlegt er sich, ob es denn sehr viele Muster aus 6 vorhandenen und 4 fehlenden Tabletten gibt. Dabei sollen zwei Muster gleich sein, wenn sie durch Drehen der Palette um $180^\circ$ ineinander übergehen.

Wie viele Muster gibt es?

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass es nur endlich viele Primzahlen $p$ gibt, für welche die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ periodisch mit einer Periodenlänge 5 ist.

*Hinweis*: Bei periodischen Dezimalbrüchen wiederholt sich ständig ein Block von Ziffern.

Zum Beispiel werden bei $4{,}3075151515151\ldots51\ldots$ Blöcke der Ziffern 51 ständig aneinander gereiht. Man schreibt $4{,}307\overline{51}$ mit der Periodenlänge 2, weil sich ein Block von zwei Ziffern ständig wiederholt.

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der ersten Runde

## Klasse 10

1. Aufgabe

Im gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$ und $|AD| = |BC|$ sei $O$ der Diagonalenschnittpunkt. Ferner seien $|\sphericalangle BAC| = 60°$ sowie $X$, $Y$, $Z$ die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OD}$ bzw. $\overline{BC}$.

Zeigen Sie, dass dann das Dreieck $XYZ$ gleichseitig ist.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^6 + 2\,x^5 - x^4 - 4\,x^3 - x^2 + 2\,x + 1 = 0.$$

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass es nur endlich viele Primzahlen $p$ gibt, für welche die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ periodisch mit einer Periodenlänge 5 ist.

*Hinweis*: Bei periodischen Dezimalbrüchen wiederholt sich ständig ein Block von Ziffern.

Zum Beispiel werden bei $4{,}3075151515151\ldots51\ldots$ Blöcke der Ziffern 51 ständig aneinander gereiht. Man schreibt $4{,}307\overline{51}$ mit der Periodenlänge 2, weil sich ein Block von zwei Ziffern ständig wiederholt.

# 22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als erste Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

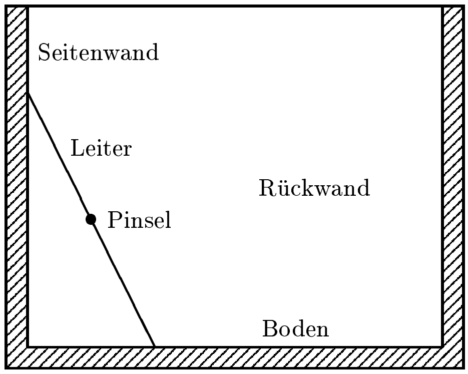
## Aufgaben der ersten Runde

## Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

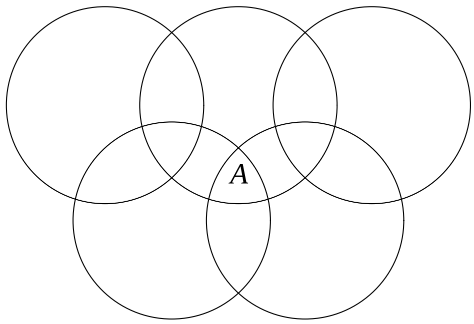
Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen $n$, für die $6n^2 + 5n - 4$ eine Primzahl ist.

2. Aufgabe




Malermeister Klecksel hat seinen Pinsel genau auf der halben Höhe der Leiter während der Frühstückspause abgelegt. Die Leiter steht in einer Ecke (siehe Abbildung). Klecksels Helfer Tölpel verursacht wie so oft ein Durcheinander. Er stolpert über die Leiter, so dass diese mit dem oberen Ende an der Seitenwand entlang und mit dem unteren Ende auf dem Fußboden abrutscht. Der Pinsel hinterlässt an der Rückwand eine Spur. Welche Form hat diese Spur?

3. Aufgabe




Die 50. Internationale Mathematik-Olympiade wird im Jahr 2009 in Deutschland stattfinden. Die Abbildung zeigt den Entwurf eines Logos mit fünf Ringen. Die Zahlen von 1 bis 15 sollen nun so in die entstehenden 15 Gebiete eingetragen werden, dass in jedem Gebiet genau eine Zahl steht und die Summe der Zahlen in jedem der fünf Ringe 38 beträgt.

a) Man zeige, dass man die Zahlen der Aufgabenstellung entsprechend eintragen kann.

b) Man zeige, dass bei jeder derartigen Belegung im Gebiet $A$ die Zahl 1 stehen muss.