

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Die Klassenstufe 5 hat eine Schulfeste. Weil die Schüler ein Theaterstück eingeübt haben, wurden die Eltern eingeladen.

- a) Es waren nun genauso viele weibliche wie männliche Personen im Saal. Die Anzahl der Jungen und Väter war gleich, aber es waren doppelt so viele Frauen wie Mädchen da. Im Aufführungssaal gab es 110 Plätze; vierzehn blieben unbesetzt. Wie viele Mädchen, Jungen, Frauen und Väter waren zur Theateraufführung gekommen?
- b) Das Theaterstück war leider schrecklich. Deswegen verließen in der Pause einige junge Personen den Saal, und zwar gleich viele Jungen wie Mädchen. Nunmehr gab es viermal so viele Frauen wie Mädchen. Wie viele Stühle waren jetzt unbesetzt?

2. Aufgabe

Ein Wanderer steht in A-Dorf am Ufer eines dreieckigen Sees. A-Dorf liegt in einer Ecke des Sees; an den anderen Ecken befinden sich B-Hausen und C-Ingen. Der Wanderer will nach D-Stetten. Er weiß:

- Von C-Ingen sind A-Dorf und B-Hausen gleich weit entfernt.
- D-Stetten liegt genau in der Mitte zwischen B-Hausen und C-Ingen.

- a) Zeichne den See und die Orte am See. (Das entstehende Dreieck nennt man übrigens gleichschenkelig.)
- b) Der Wanderer möchte von A-Dorf nach D-Stetten. Seiner Karte entnimmt er:
 - Wenn er über C-Ingen läuft, ist der Weg 18 km lang.
 - Wenn er den anderen Weg über B-Hausen nimmt, dann ist sein Weg 14 km lang.

Der Wanderer entscheidet sich für den kürzeren Weg und läuft über B-Hausen. Wie weit ist es von A-Dorf nach B-Hausen?

- c) Mache eine Probe, ob deine errechneten Strecken zusammen wirklich die in der Karte angegebenen Längen ergeben.

3. Aufgabe

Von sechs Schülerinnen, die an der zweiten Stufe der Mathematik-Olympiade teilgenommen haben, haben genau zwei 36 Punkte erreicht. Fünf der Korrektoren wurden gefragt, welche Mädchen es waren. Sie sagten:

- (1) „Ich glaube, es waren Anja und Cornelia.“
- (2) „Soweit ich mich erinnere, waren es Barbara und Dorothea.“
- (3) „Ich habe mir Friederike und Anja gemerkt.“
- (4) „Nein, nein, nein, es waren Barbara und Elke!“
- (5) „Meine Erinnerung sagt: Dorothea und Anja.“

Nun ist bekannt, dass bei einer Antwort beide Namen nicht stimmten, während bei den anderen vier Antworten jeweils ein Mädchen wirklich 36 Punkte erreicht hat und eines nicht.

Welche beiden Mädchen erhalten die Urkunden für ihre 36 Punkte?

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Manja bezahlt für einen Apfel, eine Banane, eine Grapefruit und eine große Pflaume zusammen 2,10 €. Beim Vergleich der Preise der einzelnen Obstsorten stellt sie Folgendes fest:

- (1) Fünf große Pflaumen kosten genau so viel wie drei Bananen.
- (2) Eine große Pflaume kostet halb so viel wie ein Apfel.
- (3) Eine Grapefruit und eine große Pflaume kosten zusammen so viel wie zwei Bananen.

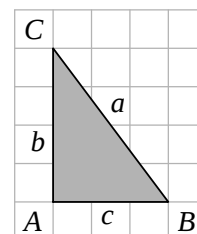
Wie viel kostet jeweils der Apfel, die Banane, die Grapefruit und die große Pflaume? Mache eine Probe.

2. Aufgabe

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC , wie in der Abbildung zu sehen ist. Dieses wird dreimal in Uhrzeigerrichtung um je 90° um den Punkt B gedreht. Die neu entstandenen Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn fortlaufend bezeichnet:

Das erste neue Dreieck heiße EBD , das zweite neue Dreieck GBF und das dritte neue Dreieck JBH .

Um die entstandene Figur wird entlang der Karolinien das kleinstmögliche Quadrat gezeichnet, in dem die Figur ganz enthalten ist.



- a) Führe diese Konstruktion für das vorgegebene Dreieck aus.
- b) Zeichne das beschriebene Quadrat und nenne es $KLMN$.
- c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates $KLMN$? Gib ihn in Einheitsquadraten (Karos) an.

3. Aufgabe

Die vier Jungen Anton, Ben, Clemens und Denny sehen auf dem Parkplatz vor der Schule ein Auto stehen, dessen Kennzeichen eine dreistellige Zahl enthält. Es war keine 0 dabei.

- a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Zahl gibt es?
- b) Sie erinnern sich später daran, dass es nur ungerade Ziffern waren. Wie viele Möglichkeiten für die Zahl gibt es nun?
- c) Ben weiß außerdem noch, dass die drei Ziffern verschieden und der Größe nach geordnet waren; die kleinste Zahl stand vorn. Welche Zahlen könnten es gewesen sein? Schreibe alle Möglichkeiten auf.
- d) Eike soll die Zahl erraten. Dazu machen die vier Jungen jeweils zwei Aussagen.

Anton: (1) Es war keine 1 drin.
(2) Es war keine 7 drin.

Ben: (1) Es war keine 3 drin.
(2) Es war keine 5 drin.

Clemens: (1) Es war eine 7 drin.
(2) Es war eine 9 drin.

Denny: (1) Es war eine 3 drin.
(2) Es war eine 9 drin.

Frank hat die Nummer auch gesehen und die Aussagen gehört. Er sagt: „Tut mir Leid, lieber Eike, jeder der vier hat eine wahre und eine falsche Aussage gemacht.“

„Oh, dann ist doch alles klar!“ sagt Eike. Welche Zahl hat Eike aus den Aussagen der vier Jungen und Franks Kommentar ermittelt?

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Drei Freunde wohnen in den Dörfern A-Dorf, B-Dorf und C-Dorf, jeder in einem anderen Dorf. Über diese Wohnorte gibt es die folgenden drei Aussagen, von denen aber nur eine wahr ist. Die beiden anderen sind falsch.

- (1) Hans wohnt in A-Dorf.
- (2) Kurt wohnt nicht in A-Dorf.
- (3) Uwe wohnt nicht in B-Dorf.

Weise nach, dass man aus diesen Aussagen die Wohnorte eindeutig herleiten kann.

2. Aufgabe

Herr Hinz und Herr Kunz sind leidenschaftliche Briefmarkensammler. Sie vereinbaren einen Austausch ihrer Sammelergebnisse.

Herr Hinz schreibt in einer E-Mail: „Ich habe zurzeit insgesamt 83 Marken aus vier verschiedenen Ländern. Die Anzahl der norwegischen Marken ist um eins kleiner als das Doppelte der Anzahl der dänischen. Die Anzahl der schwedischen Marken ist um vier größer als das Dreifache der Anzahl der dänischen. Die Anzahl der englischen Marken ist gleich der Summe aus der Anzahl der norwegischen und der Anzahl der schwedischen.“

Herr Kunz antwortet: „Ich habe zurzeit insgesamt 267 Marken aus vier verschiedenen Ländern. Die Anzahl der italienischen Marken ist um fünf kleiner als das Dreifache der Anzahl der spanischen. Die Anzahl der deutschen Marken ist gleich der Summe aus dem Doppelten der Anzahl der italienischen Marken und der Anzahl der französischen. Die Anzahl der französischen Marken ist gleich der Differenz aus dem Dreifachen der Anzahl der italienischen Marken und dem Doppelten der Anzahl der spanischen.“

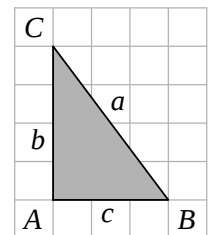
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahl der Marken aus den genannten Ländern eindeutig zu ermitteln ist. Ist dies der Fall, dann gib diese Anzahlen an und weise jeweils durch eine Probe nach, dass die ermittelten Anzahlen die Aussagen von Herrn Hinz bzw. Herrn Kunz erfüllen.

3. Aufgabe

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC , wie in der Abbildung zu sehen ist. Dieses wird dreimal in Uhrzeigerrichtung um je 90° um den Punkt B gedreht. Die neu entstandenen Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn fortlaufend bezeichnet:

Das erste neue Dreieck heiße EBD , das zweite neue Dreieck GBF und das dritte neue Dreieck JBH .

Um die entstandene Figur wird entlang der Karolinien das kleinstmögliche Quadrat gezeichnet, in dem die Figur ganz enthalten ist.



- a) Führe diese Konstruktion für das vorgegebene Dreieck aus.
- b) Zeichne das beschriebene Quadrat und nenne es $KLMN$.
- c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates $KLMN$? Gib ihn in Einheitsquadraten (Karos) an.
- d) Hängt die Seitenlänge des Quadrates von den gegebenen Seitenlängen b und c des gegebenen Dreiecks ABC ab? Wenn ja, gib diese Abhängigkeit an. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Gärtner Grün hat für ein rechteckiges Frühlingsbeet 276 Tulpenzwiebeln gekauft. Aus 66 wachsen rot blühende Tulpen, aus 210 wachsen Tulpen mit gelben Blüten.

Gärtner Grün steckt die Zwiebeln im empfohlenen Abstand von 15 cm in den Boden. Alle rot blühenden Tulpen werden an den Rand des Beetes gesetzt, 5 cm vom Rand entfernt. Die gelb blühenden Tulpen werden ins Innere gesetzt, wie es die Abbildung zeigt.

rot	rot	rot	...	rot	rot
rot	gelb	gelb	...	gelb	rot
rot	gelb	gelb	...	gelb	rot
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
rot	gelb	gelb	...	gelb	rot
rot	rot	rot	...	rot	rot

Berechne den Flächeninhalt des Blumenbeetes.

2. Aufgabe

Im folgenden Zahlenrätsel (Kryptogramm) sind jeweils gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern zu ersetzen und verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Ziffern zu belegen. Am Anfang einer Zahl steht niemals die Ziffer 0.

$$\begin{array}{r} \text{V I E R} \\ + \text{V I E R} \\ \hline \text{A C H T} \end{array}$$

Dieses Kryptogramm besitzt insgesamt 77 Lösungen.

- Ermittle diejenige Lösung, bei der die Summe möglichst klein ist.
- Gib weitere zwei Lösungen dieses Kryptogramms an. Eine Begründung wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.

3. Aufgabe

Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $ABCD$ ist ein Trapez, in dem die Seite $\overline{AB}$ parallel zur Seite $\overline{CD}$ ist.
- Die Strecke $\overline{AB}$ ist 6 cm lang.
- Für die Länge der Höhe gilt $h = 3,5$ cm.
- Die Strecke $\overline{AD}$ ist 4 cm lang.
- Die Größe des Winkels DCA beträgt $\varphi = 35^\circ$.

- Beschreibe deine Konstruktion.
- Führe die beschriebene Konstruktion durch.
- Zeige: Wenn ein Viereck $ABCD$ wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1) bis (5).

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Die Läuferinnen Karla, Lili und Momo sind bekannt dafür, dass sie als Schlussläuferinnen ihrer (3×1000 m)-Staffeln mit der Gleichmäßigkeit eines Uhrwerks ihre Runden drehen. Beim letzten Staffelrennen gewann Momo auf jeweils 50 m ihrer Laufstrecke 5 m gegen Lili und hatte im Ziel 20 m Vorsprung vor dieser. Karla holte auf jeweils 200 m ihrer Laufstrecke 15 m zu Lili auf, doch rettete diese einen knappen Vorsprung von 1 m vor Karla ins Ziel.

Welche Läuferin ging als letzte auf ihre 1000-m-Strecke und wie groß waren zu diesem Zeitpunkt ihre Rückstände auf die beiden Konkurrentinnen?

2. Aufgabe

Zeigen Sie: Berühren sich je zwei von drei Kreisen von außen, so bilden die Berührungspunkte ein spitzwinkliges Dreieck.

3. Aufgabe

Im folgenden Zahlenrätsel (Kryptogramm) sind jeweils gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern zu ersetzen und verschiedene Buchstaben mit verschiedenen Ziffern zu belegen. Am Anfang einer Zahl steht niemals die Ziffer 0.

$$\begin{array}{r} \text{V I E R} \\ + \text{V I E R} \\ \hline \text{A C H T} \end{array}$$

Dieses Kryptogramm besitzt 77 Lösungen.

- Ermittle diejenige Lösung, bei der die Summe möglichst klein ist.
- Ermittle diejenige Lösung, bei der die Summe möglichst groß ist.
- Gib weitere zwei Lösungen dieses Kryptogramms an. Eine Begründung wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Die Läuferinnen Karla, Lili und Momo sind bekannt dafür, dass sie als Schlussläuferinnen ihrer $(3 \times 1000 \text{ m})$ -Staffeln mit der Gleichmäßigkeit eines Uhrwerks ihre Runden drehen. Beim letzten Staffelrennen gewann Momo auf jeweils 50 m ihrer Laufstrecke 5 m gegen Lili und hatte im Ziel 20 m Vorsprung vor dieser. Karla holte auf jeweils 200 m ihrer Laufstrecke 15 m zu Lili auf, doch rettete diese einen knappen Vorsprung von 1 m vor Karla ins Ziel.

Welche Läuferin ging als letzte auf ihre 1000-m-Strecke und wie groß waren zu diesem Zeitpunkt ihre Rückstände auf die beiden Konkurrentinnen?

2. Aufgabe

Es sei ABC ein Dreieck mit rechtem Innenwinkel bei C . Der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe sei H . Die Winkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle ACH$ und $\sphericalangle HCB$ schneiden die Seite $\overline{AB}$ in den Punkten P bzw. Q .

Man zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PQC der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist.

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass es eine Folge $F = (n_0, n_1, \dots, n_7)$ von acht ganzen Zahlen mit folgender Eigenschaft gibt: Für $i = 0, \dots, 7$ gibt die Zahl n_i die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl i in der Folge $(n_0, n_1, \dots, n_7)$ an (so gibt beispielsweise n_3 an, wie viele der Zahlen aus der Folge $(n_0, n_1, \dots, n_7)$ gleich 3 sind).

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 11

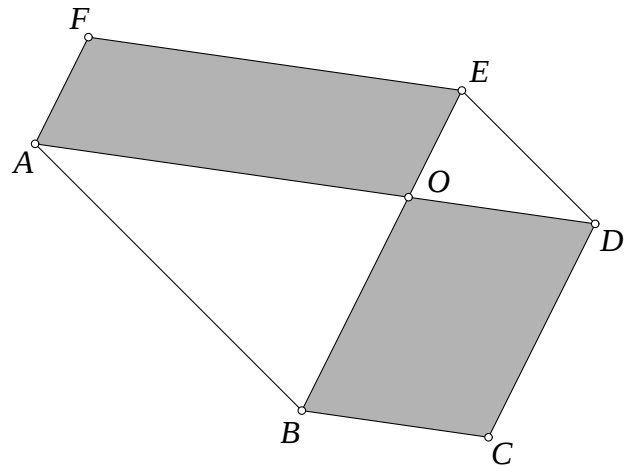
1. Aufgabe

Für jede ganze Zahl k mit $k \geq 2$ untersuche man, ob die Summe von k aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen eine Primzahl sein kann.

2. Aufgabe

Im Jahr 2009 wird die Internationale Mathematik-Olympiade in Deutschland stattfinden. Ein Vorschlag für das Logo zeigt ein Sechseck $ABCDEF$, bei dem die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel sind. Außerdem ist die Diagonale $\overline{AD}$ parallel zu $\overline{BC}$ und die Diagonale $\overline{BE}$ parallel zu $\overline{CD}$, der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ sei O (vgl. Abbildung).

Man zeige, dass die Flächeninhalte der Parallelogramme $FAOE$ und $CDOB$ (in der Abbildung grau) gleich groß sind.



3. Aufgabe

Man ermittle alle von null verschiedenen ganzen Zahlen a , für die die Gleichung

$$a^3 \cdot x^3 + a^2 \cdot x^2 + a \cdot x + a = 0 \tag{1}$$

ganzahlige Lösungen x besitzt, und gebe diese Lösungen an.

22. Essener Mathematikwettbewerb 2006/2007

als zweite Runde der 46. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 12-13

1. Aufgabe

Für jede ganze Zahl k mit $k \geq 2$ untersuche man, ob die Summe von k aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen eine Primzahl sein kann.

2. Aufgabe

Man ermittle alle von null verschiedenen ganzen Zahlen a , für die die Gleichung

$$a^3 \cdot x^3 + a^2 \cdot x^2 + a \cdot x + a = 0 \tag{1}$$

ganzzahlige Lösungen x besitzt, und gebe diese Lösungen an.

3. Aufgabe

Man untersuche, für welche nichtnegativen ganzen Zahlen n ein Tetraeder existiert, dessen Seitenflächen insgesamt genau n rechte Winkel haben.

Hinweis: Ein Tetraeder ist ein von vier Dreiecken begrenzter Körper.