

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Setze folgende Zahlenreihen fort, indem du die Zahlen auf den freien Plätzen hinschreibst und angibst, wie du diese Zahlen gefunden hast und wie du die nächsten Zahlen finden würdest, wie also die Reihe weitergeht.

- | | | | | | | | | | | | |
|----|----|---|----|----|----|-----|-----|------|-------|-------|-------|
| a) | 2 | 4 | 8 | 10 | 20 | 22 | 44 | 46 | _____ | _____ | _____ |
| b) | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | _____ | _____ | _____ |
| c) | 1 | 1 | 6 | 16 | 31 | 51 | 76 | 106 | _____ | _____ | _____ |
| d) | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | _____ | _____ | _____ |
| e) | 10 | 5 | 20 | 10 | 40 | 20 | 80 | 40 | _____ | _____ | _____ |

2. Aufgabe

Die Abbildung a zeigt dir Figuren, die aus Quadraten zusammengesetzt wurden.

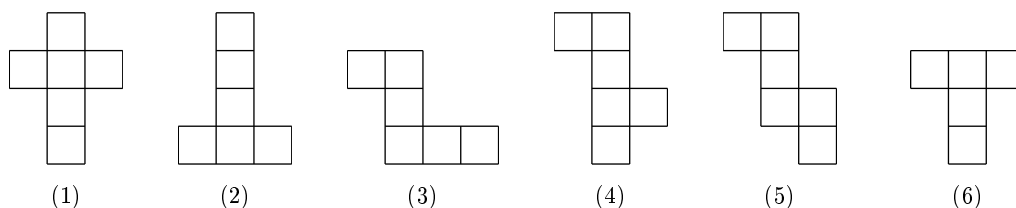
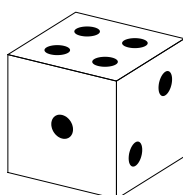
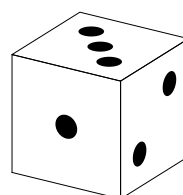


Abbildung a

- Welche der Figuren lassen sich nicht entlang der eingezeichneten Linien zu einem Würfel falten? Begründe!
- Die Figuren, die sich zu Würfeln falten lassen, bezeichnet man als Würfelnetze. Es gibt insgesamt (bis auf Spiegelung) 11 solcher Würfelnetze. Zeichne alle weiteren Würfelnetze, die in der Abbildung noch fehlen!
- Die üblichen Würfel sind nach der Siebener-Regel beschriftet: Die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Seiten ist 7. Von diesen Würfeln gibt es zwei Sorten, den Links-Würfel und den Rechts-Würfel, siehe Abbildung b.



Links-Würfel



Rechts-Würfel

Abbildung b

Zeichne in das erste Würfelnetz (Nummer 1) die Augenzahlen so ein, dass es einmal zu einem Links-Würfel und einmal zu einem Rechts-Würfel gehört.

3. Aufgabe

Katja und David experimentieren mit Geraden und zählen die Schnittpunkte der Geraden. Sie verabreden, dass keine ihrer Geraden zusammenfallen sollen.

- Katja zeichnet zwei Geraden. Welche Anzahlen für die Schnittpunkte sind möglich? Zeichne je ein Beispiel auf!
- David zeichnet drei Geraden. Welche Anzahlen für die Schnittpunkte sind da möglich? Zeichne je ein Beispiel auf!
- Katja zeichnet nun vier Geraden und will möglichst viele Schnittpunkte bekommen. Wie viele Schnittpunkte kann sie höchstens erhalten?
- David zeichnet in Katjas Zeichnung eine fünfte Gerade, die zu keiner bisherigen Gerade parallel ist. Wie viele Schnittpunkte kommen dazu, wenn er nicht durch vorhandene Schnittpunkte zeichnet?
- Beide überlegen, wie viele Schnittpunkte zehn Geraden höchstens haben können. Ermittle diese Anzahl!

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Peter spielt mit Zahlen, er wählt sich eine Zahl aus und führt immer wieder vier Schritte nacheinander aus:

1. Schritt – er addiert 2; 2. Schritt – er multipliziert das Ergebnis mit 2; 3. Schritt – er zieht vom neuen Ergebnis 2 ab und 4. Schritt – er teilt dann dieses Ergebnis wieder durch 2.

Dann fängt er wieder mit den vier Schritten an: plus 2, mal 2, minus 2, durch 2. Diese vier Schritte bilden einen Zyklus. Er beginnt mit der Zahl 10.

- a) Welche Zahl hat er nach neun Schritten erreicht, also nach zwei Zyklen und einem weiteren Schritt?
- b) Zeige, dass er auch die Zahl 100 erreichen wird.
- c) Nach wie vielen Zyklen und Schritten erreicht er die 100 zum ersten Mal?

2. Aufgabe

Löse das folgende Kryptogramm (in jedem Kryptogramm bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern).

$$\begin{array}{r}
 ABB - CD = BBD \\
 : \quad - \quad - \\
 E \cdot FG = CH \\
 \hline
 GD + HB = FBH
 \end{array}$$

3. Aufgabe

Wir betrachten Wege auf einem Quadratgitter. Am Anfang stehen wir auf einem Punkt, den wir O nennen.

Den ersten Stopp machen wir nach einem Weg wie unter (1) in Abbildung a eingezeichnet, wir haben drei Kantenlängen zurückgelegt. Beim zweiten Stopp haben wir den Weg wie unter (2) zurückgelegt, beim dritten Stopp sieht der zurückgelegte Weg aus wie unter (3) in Abbildung a. Danach wird der Weg immer so weiter nach dem gleichen Schema gebildet.

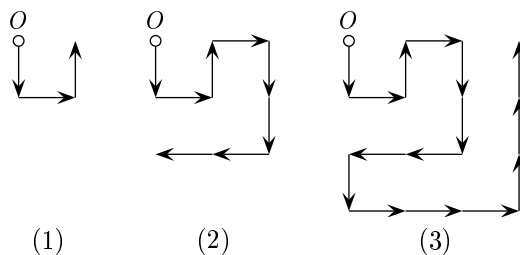


Abbildung a

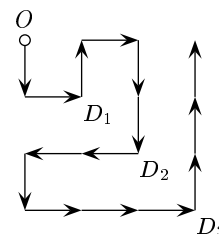


Abbildung b

- a) Wie viele Kantenlängen (KL) sind vom ersten bis zum zweiten Stopp zurückgelegt worden? Wie viele vom zweiten bis zum dritten? Wie viele vom neunten bis zum zehnten?
- b) Wie kann man die Zahl der insgesamt zurückgelegten KL *allgemein* leicht berechnen, ohne immer alle Quadrate und Wege zeichnen zu müssen?
- c) Jetzt betrachten wir die Anzahl der KL, die wir zurückgelegt haben, wenn wir an den Punkten auf der Diagonalen angekommen sind (siehe Abbildung b). Auch hier wieder: Wie weit ist es bis zum zweiten Diagonalenpunkt D_2 ? Wie weit ist es bis zum dritten Diagonalenpunkt D_3 ? Und wie weit ist es bis zum Punkt D_{10} ?
Kannst du auch hier einen allgemeinen Ausdruck angeben?

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

- a) Die Abbildung a zeigt eine Figur, die aus 12 deckungsgleichen Quadraten besteht, von denen vier grau gefärbt sind. Zerlege diese Figur entlang der Quadratseiten so in deckungsgleiche Teilfiguren, dass jede dieser Figuren genau ein graues Quadrat enthält.

Hinweis: Als Lösung genügt eine Zeichnung. Eine Begründung wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.

- b) Die Abbildung b zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge a . Von diesem Quadrat werden zwei Dreiecke abgeschnitten und zwei rechtwinklige Dreiecke herausgeschnitten. Diese Dreiecke sind in der Abbildung grau gefärbt. Die jeweils kürzere Kathete dieser Dreiecke habe die Länge $\frac{3}{8}a$.

Ermittle den Inhalt der nicht grau gefärbten Restfläche in Abhängigkeit von a .

Hinweis: Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, Katheten. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt Hypotenuse.

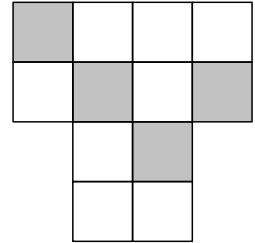


Abbildung a

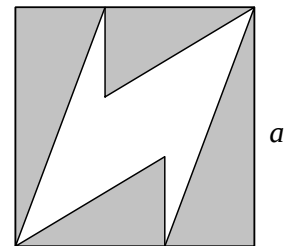


Abbildung b

2. Aufgabe

Aus vielen gleichen Holzwürfeln wird ein größerer Würfel zusammengesetzt. Mindestens eine Seitenfläche des großen Würfels wird gefärbt. Nachdem der große Würfel wieder zerlegt worden ist, zählt man genau 1000 unbemalte kleinere Würfel.

Wie viele Seitenflächen des großen Würfels können gefärbt worden sein?

3. Aufgabe

Löse das folgende Kryptogramm (in jedem Kryptogramm bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern).

$$\begin{array}{r}
 ABB - CD = BBD \\
 : \quad - \quad - \\
 \hline
 E \cdot FG = CH \\
 \hline
 GD + HB = FBH
 \end{array}$$

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Zum Tierbestand eines Gutes gehören Pferde, Rinder, Schafe, Hühner und Gänse, insgesamt 114 Tiere. Von den vierfüßigen Tieren gibt es 8 weniger als vom Geflügel. Es sind 3 Rinder mehr als Pferde, 20 Rinder weniger als Schafe und 13 Hühner weniger als Gänse.

Wie viele Tiere von jeder Art gehören zum Tierbestand des Gutes?

2. Aufgabe

Wir betrachten in allen folgenden Teilaufgaben echte Brüche mit Nennern von 2 bis n , wobei n eine natürliche Zahl größer als 2 sei. Von all diesen Brüchen wird gefordert, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind.

- Gib alle derartigen Brüche für den Fall an, dass $n = 5$ gilt.
- Gib alle derartigen Brüche für den Fall an, dass $n = 7$ gilt, und ordne diese Brüche der Größe nach. Beginne dabei mit dem kleinsten Bruch. Wie viele Brüche enthält diese geordnete Menge?
- Wir denken uns die in Teilaufgabe b) ermittelten Brüche auf einem Zahlenstrahl angeordnet. Zeige, dass die Summe aus dem 2. Bruch links von $\frac{1}{2}$ und dem 2. Bruch rechts von $\frac{1}{2}$ sowie die Summe aus dem jeweils 5. Bruch links und rechts von $\frac{1}{2}$ jeweils 1 beträgt.

Äußere diesbezügliche Vermutungen, die für alle derartigen geordneten Mengen gelten.

3. Aufgabe

- Die Abbildung a zeigt eine Figur, die aus 12 deckungsgleichen Quadraten besteht, von denen vier grau gefärbt sind. Zerlege diese Figur entlang der Quadratseiten so in deckungsgleiche Teilfiguren, dass jede dieser Figuren genau ein graues Quadrat enthält.

Hinweis: Als Lösung genügt eine Zeichnung. Eine Begründung wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.

- Die Abbildung b zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge a . Von diesem Quadrat werden zwei Dreiecke abgeschnitten und zwei rechtwinklige Dreiecke herausgeschnitten. Diese Dreiecke sind in der Abbildung grau gefärbt. Die jeweils kürzere Kathete dieser Dreiecke habe die Länge $\frac{3}{8}a$.

Ermittle den Inhalt der nicht grau gefärbten Restfläche in Abhängigkeit von a .

Hinweis: Im rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, Katheten. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt Hypotenuse.

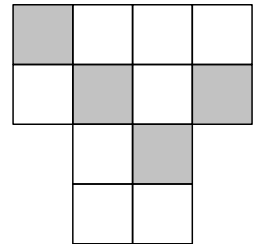


Abbildung a

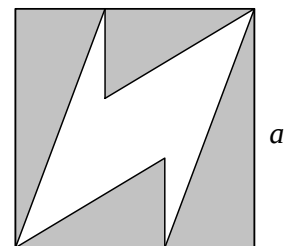


Abbildung b

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Menschen feiern gern runde Geburtstage. Damit meint man in der Regel den 10., 20., 30. usw. Geburtstag. Am Ende der Zahlen in dezimaler Schreibweise (im Zehnersystem) steht eine Null.

Ein Mathematiker kennt aber auch Darstellungsmöglichkeiten in anderen Positionssystemen. So ergibt sich z. B. aus $35 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$, dass die Zahl 35 im Fünfersystem als 120 geschrieben wird, kurz: $35 = [120]_5$. Man kann somit im Alter von 35 Jahren einen runden Geburtstag feiern, weil die Zahl 35 im Fünfersystem eine „runde“ Darstellung hat.

Onkel Willi feiert heute seinen (im Dezimalsystem) 50. Geburtstag.

- a) Wie viele runde Darstellungen seines Alters gibt es?
- b) Wie viele Jahre muss er warten, um ein Lebensalter zu erreichen, das mehr als zehn runde Darstellungen zulässt?

2. Aufgabe

Wie groß sind die Innenwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, bei dem die Winkelhalbierende eines Basiswinkels dieses Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt?

3. Aufgabe

In einer alten Geschichte wird erzählt, dass ein reicher Mann 333 Goldstücke an seine 9 Söhne verteilen will. Er legt fest:

- Der jüngste Sohn soll die wenigsten Goldstücke bekommen.
- Je älter ein Sohn ist, desto mehr Goldstücke soll er bekommen.
- Die Anzahl der Goldstücke, die ein älterer Sohn mehr bekommt als sein unmittelbar jüngerer Bruder, soll immer gleich sein.

Bestimme alle möglichen Verteilungen der Goldstücke und begründe, dass es außer den von dir genannten keine weiteren Verteilungen geben kann.

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Menschen feiern gern runde Geburtstage. Damit meint man in der Regel den 10., 20., 30. usw. Geburtstag. Am Ende der Zahlen in dezimaler Schreibweise (im Zehnersystem) steht eine Null.

Ein Mathematiker kennt aber auch Darstellungsmöglichkeiten in anderen Positionssystemen. So ergibt sich z. B. aus $35 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$, dass die Zahl 35 im Fünfersystem als 120 geschrieben wird, kurz: $35 = [120]_5$. Man kann somit im Alter von 35 Jahren einen runden Geburtstag feiern, weil die Zahl 35 im Fünfersystem eine „runde“ Darstellung hat.

Onkel Willi feiert heute seinen (im Dezimalsystem) 50. Geburtstag.

- Wie viele runde Darstellungen seines Alters gibt es?
- Wie viele Jahre muss er warten, um ein Lebensalter zu erreichen, das mehr als zehn runde Darstellungen zulässt?

2. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen a, b, c gibt, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = 8c - 2$ erfüllen.

Hinweis: Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die Elemente $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

3. Aufgabe

In der Ebene sind mehrere Viertelkreisbögen vom Radius 1 derart gegeben, dass Folgendes gilt:

Je zwei der Kreisbögen haben entweder gar keinen oder genau einen Punkt gemeinsam. Wenn sie einen Punkt gemeinsam haben, so ist der gemeinsame Punkt Endpunkt beider Kreisbögen, und die beiden Tangenten an die Kreisbögen in diesem Punkt sind gleich. Zusammen bilden die Kreisbögen eine geschlossene Kurve, welche eine Fläche vom Flächeninhalt F einschließt.

Die Abbildung a zeigt ein Beispiel für eine solche Kurve. Die eingezeichneten Punkte sind die Endpunkte der Viertelkreisbögen. Man beachte, dass z. B. in Abbildung b die Übergänge zwischen den Kreisbögen die Forderungen der Aufgabenstellung nicht erfüllen.

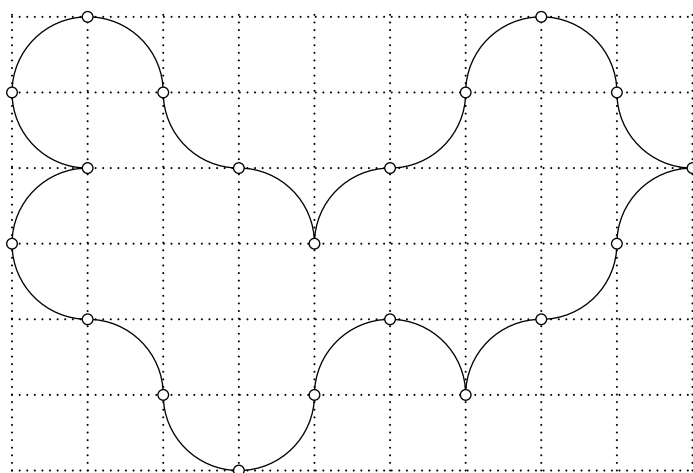


Abbildung a

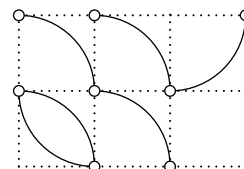


Abbildung b

- Bestimmen Sie die Fläche, welche von der Kurve in Abbildung a eingeschlossen wird.
- Zeigen Sie, dass es für jede Kurve, welche die obige Bedingungen erfüllt, ganze Zahlen m und n gibt, für die $F = 4 \cdot n + m \cdot \pi$ gilt.

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als erste Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

- (i) In der Dezimaldarstellung von n kommt jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau einmal vor.
- (ii) Für $k = 1, 2, \dots, 10$ ist k ein Teiler der aus den ersten k Ziffern von n gebildeten Zahl.

2. Aufgabe

Die Kreise k_1 mit Mittelpunkt M_1 und k_2 mit Mittelpunkt M_2 schneiden sich in zwei Punkten A und B . Die Gerade AM_1 schneidet den Kreis k_1 in den Punkten A und C , die Gerade AM_2 schneidet den Kreis k_2 in den Punkten A und D .

Man zeige, dass die Geraden CD und M_1M_2 parallel sind und dass B auf der Geraden CD liegt.

3. Aufgabe

Entlang einer Kreislinie sind abwechselnd n Lampen und n Schalter angeordnet wie in der Abbildung für $n = 3$ gezeigt. Jeder Schalter besitzt die Stellungen „Ein“ und „Aus“. Jede Lampe leuchtet genau dann, wenn die beiden zu ihr benachbarten Schalter unterschiedliche Stellung haben.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die sich die Schalter so einstellen lassen, dass genau die Hälfte der Lampen leuchtet.

