

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Die üblichen Spielwürfel sind nach der Siebener-Regel beschriftet: Die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Seiten ist 7.

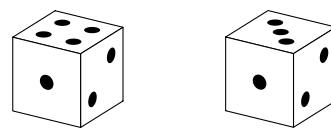


Abbildung a

- a) Welche Augenzahlen haben die beiden Würfel in der Abbildung a auf der unteren Fläche, auf der Fläche links hinten und auf der Fläche rechts hinten?
- b) Welche der Würfel in der Abbildung b sind keine Würfel nach der Siebener-Regel? Begründe warum.

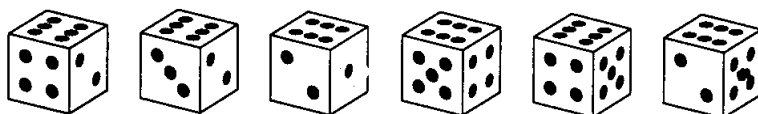


Abbildung b

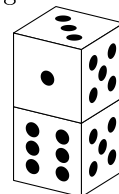


Abbildung c

- c) Zwei Würfel stehen so übereinander wie in der Abbildung c. Wie groß ist die Augensumme der aufeinanderliegenden Flächen? Gibt es mehrere Lösungen?

2. Aufgabe

Der Sportlehrer soll für ein Turnier im Badminton (Federball) eine Mannschaft aus zwei Mädchen und zwei Jungen aufstellen. In seiner Trainingsgruppe sind aber drei Mädchen und drei Jungen. Die Kinder heißen Anne, Bea, Claudia, Daniel, Erik und Falk.

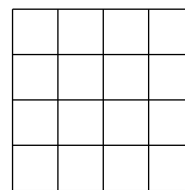
- a) Wie viele verschiedene Mannschaften kann er aufstellen?
- b) Als er mit der Trainingsgruppe über die Aufstellung spricht, bekommt er folgende Einwände:
- (1) Daniel sagt: „Ich spiele nur mit, wenn Bea auch mitspielt.“
 - (2) Bea möchte nicht mit Erik in der Mannschaft sein.
 - (3) Erik: „Ich spiele nicht mit, wenn Claudia oder Falk dabei sind.“

Der Sportlehrer stöhnt.

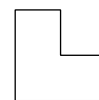
Ermittle alle Mannschaftsaufstellungen, bei denen alle Wünsche der Kinder erfüllt sind.

3. Aufgabe

Ein (4×4) -Quadrat soll mit Winkelflächen aus drei Einheitsquadraten ausgelegt werden (siehe nebenstehende Abbildung). Beim Auslegen kann man die Winkelflächen natürlich drehen.



(4×4) -Quadrat



Winkelfläche

- a) Warum muss bei jeder solchen Auslegung in dem (4×4) -Quadrat ein Einheitsquadrat frei bleiben?
- b) Zeige, wie man das (4×4) -Quadrat (bis auf das eine frei bleibende Einheitsquadrat) mit den Winkelflächen auslegen kann. Als Lösung genügt eine Zeichnung mit den Winkelflächen und dem frei bleibenden leeren Feld.
- c) Zeige, dass man ein (5×5) -Quadrat ebenfalls mit den Winkelflächen auslegen kann, wenn man das mittlere Einheitsquadrat frei lässt.
- d) Gib die Größe eines Quadrats an, das sich vollständig mit diesen Winkelflächen auslegen lässt. (Du musst dabei zeigen, dass dein Quadrat sich wirklich vollständig auslegen lässt!)

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Das Postauto soll die Post in die Orte A , B , C , D und E bringen, die so miteinander durch Straßen verbunden sind wie in der Abbildung a. Es startet am Postamt im Ort A und soll dorthin auch wieder zurückkehren. Dabei soll jeder Ort nur einmal angefahren werden.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es?

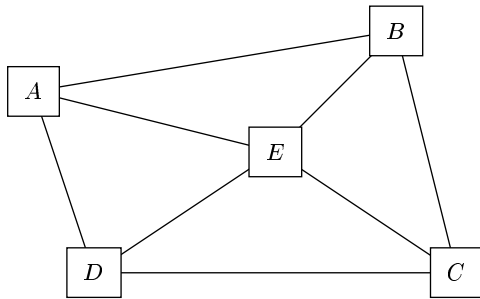


Abbildung a

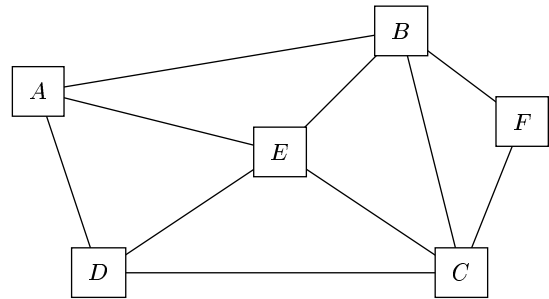


Abbildung b

Nun ist noch der Ort F dazu gekommen (siehe Abbildung b). Wieder wird die Tour in A begonnen und beendet und jeder Ort nur einmal angefahren.

- b) Warum kann die Tour nicht mit der Reihenfolge $A-E-C$ begonnen werden?
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

2. Aufgabe

- a) Sven schreibt vier verschiedene Zahlen auf, die alle kleiner sind als 10. Wenn er das Produkt dieser vier Zahlen bildet, erhält er 420. Die Summe seiner Zahlen ist 20. Welche Zahlen hat Sven aufgeschrieben?
- b) Inka und Daniel schreiben auch je vier verschiedene Zahlen auf (Achtung, Inka und Daniel kennen die Zahlen des anderen nicht), die auch alle kleiner als 10 sind. Daniel und Inka erhalten beide 120 als Produkt ihrer Zahlen, aber Daniels Summe seiner Zahlen ist größer als Inkas Summe. Welche Zahlen können die beiden jeweils aufgeschrieben haben? Gib alle Möglichkeiten an.

Mache bei beiden Aufgabenteilen jeweils eine Probe.

3. Aufgabe

Gulliver kommt auf seinen Reisen auch auf die fliegende Insel *Laputa*, auf der die Astronomen herrschen.

Die Astronomen haben ihre Zeit anders eingeteilt als wir: „Bei uns hat der Tag zehn Horen. Jede Hore hat einhundert Menores, und jeder Menor besteht wieder aus einhundert Diminuti. Offensichtlich sind damit alle eure Zeiteinheiten – Stunden, Minuten und Sekunden – kürzer als unsere entsprechenden Einheiten, die Horen, die Menores und die Diminuti“, sagt der Chef-Astronom zu Gulliver.

- a) Stimmt diese Aussage? Begründe deine Entscheidung.

Gullivers Taschenuhr gibt jede Minute ein „Pling“ von sich, während die Standuhr des Chef-Astronomen jeden Menor einmal „Plang“ sagt. Gullivers Audienz beim Chef-Astronomen dauerte genau eine Stunde; am Anfang der Audienz waren die Uhren genau im Gleichtakt.

- b) Wie häufig ertönte während dieser Stunde (also den Anfang und das Ende der Stunde ausgenommen) ein Pling und wie häufig ein Plang?

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Herr Fleißig fährt fast jeden Werktag mit seinem Moped von Schlafhausen nach Schaffstadt. Dafür braucht er für gewöhnlich eine Dreiviertelstunde. Eines Tages legt Herr Schnell mit seinem Auto bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 72 km/h die gleiche Strecke zurück. Er startet aber eine Viertelstunde später als Herr Fleißig und trifft 5 Minuten früher in Schaffstadt ein.

- a) Wie weit liegen die beiden Orte voneinander entfernt?
- b) Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Mopeds?

2. Aufgabe

Wir betrachten ein Quadrat und ein von einem Quadrat verschiedenes Rechteck. Die beiden Vierecke haben den gleichen Umfang.

- a) Die Quadratseite ist 4,5 cm lang. Eine der Rechteckseiten ist 5 mm länger als die Quadratseite. Um wie viel Quadratzentimeter unterscheiden sich die Flächeninhalte des Quadrats und des Rechtecks?
- b) Weise nach, dass folgende Aussage gilt: „Haben ein Quadrat und ein Rechteck den gleichen Umfang, dann ist die Quadratseite halb so lang wie zwei benachbarte Rechteckseiten zusammen.“

3. Aufgabe

Betrübt schaut sich Herr Müller seinen Garten an: Am Sonntag drei frische Maulwurfshügel, am Montag wieder drei neue, am Dienstag kommen zwei dazu, am Mittwoch drei, am Donnerstag noch einmal drei und das alles in dieser Woche. Da war Familie Maulwurf am Werk.

Es ist bekannt: Vater Maulwurf wirft an fünf aufeinander folgenden Tagen höchstens vier Hügel auf, Frau Maulwurf an fünf aufeinander folgenden Tagen höchstens drei Hügel. Jedes der beiden Maulwurfskinder wirft nur an jedem zweiten Tag einen Hügel auf. Jeder dieser Maulwürfe schafft an einem Tag höchstens einen Hügel.

- a) Weise nach, dass nicht alle Maulwurfshügel von dieser Familie stammen können, sondern dass noch mindestens ein fremder Maulwurf am Werk war.
- b) Mindestens wie viele Maulwurfshügel stammen nicht von dieser Familie?

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Wir betrachten in dieser Aufgabe eine übliche Analoguhr, das ist eine Uhr mit einem Stunden- und einem Minutenzeiger und einem Zifferblatt mit den Zahlen von 1 bis 12.

- a) Wie groß ist der spitze Winkel zwischen den beiden Uhrzeigern um 3:12 Uhr?
- b) In jeder Stunde steht irgendwann einmal der Minutenzeiger über dem Stundenzeiger. Um wie viel Uhr genau ist dies zwischen 7 und 8 Uhr der Fall? (Gib den exakten Wert an, keine Näherung.)

Hinweis: Beginne bei der Zeigerstellung 12 mit der Gradzahl 0° . Überlege zunächst die Gradzahl für Stunden- und Minutenzeiger getrennt.

2. Aufgabe

Eine Mädchenklasse stellt in der Bastelstunde Haargummis her. Zur Verfügung stehen ausreichend viele Glasperlen in drei verschiedenen Farben. Für jeden dieser Haargummis fädeln die Schülerinnen jeweils fünf Perlen auf eine Gummischnur und verknoten diese zu einem Ring. Der Knoten ist am Ende nicht mehr zu sehen.

Wie viele verschiedene Haargummis können auf diese Weise gefertigt werden?

3. Aufgabe

Familie Klug ist eine sechsköpfige Familie mit zwei Töchtern und zwei Söhnen; drei der Kinder sind Drillinge. Die Summe der ganzzahligen Lebensalter der „Männer“ bzw. aller weiblichen Familienmitglieder hat jeweils den Wert 61. Die Anzahl der Lebensjahre ist für jedes Familienmitglied eine Primzahl und Frau Klug ist jünger als 40 Jahre.

Wie alt ist jedes der sechs Familienmitglieder?

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

- a) Man beweise: Eine 10-stellige natürliche Zahl, die jede Ziffer genau einmal enthält, kann keine Primzahl sein.
- b) Im Folgenden betrachten wir eine Primzahl p mit $p > 3$ und eine natürliche Zahl n mit $n \geq 1$.
Man beweise: Wenn die Dezimaldarstellung von p^n genau hundert Stellen besitzt, dann kommt in dieser dezimalen Darstellung von p^n eine Ziffer mehr als zehnmal vor.

2. Aufgabe

Max fährt immer mit der U-Bahn zur Schule. Er muss dazu an der Station „Schillerstraße“ aussteigen. Vom Bahngleis führen eine Treppe und eine Rolltreppe nach oben, Max hat jedoch die Angewohnheit, ausschließlich die Rolltreppe zu benutzen.

Max geht immer mit derselben Geschwindigkeit und hat festgestellt, dass er morgens auf dem Weg zur Schule, wenn er die Rolltreppe hinaufgeht, stets 15 Stufen zählt, und nachmittags auf dem Weg nach Hause, wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, 35 Stufen nehmen muss.

Diese Woche ist die Rolltreppe kaputt. Wie viele Stufen wird Max jetzt zählen, wenn er die Rolltreppe benutzt?

Hinweis: Der Effekt, dass die Treppenstufen am Anfang und am Ende der Rolltreppe ihre Höhe ändern und verschwinden, ist zu vernachlässigen.

3. Aufgabe

Wir betrachten in dieser Aufgabe eine übliche Analoguhr, das ist eine Uhr mit einem Stunden- und einem Minutenzeiger und einem Zifferblatt mit den Zahlen von 1 bis 12.

- a) Wie groß ist der spitze Winkel zwischen den beiden Uhrzeigern um 3:12 Uhr?
- b) In jeder Stunde steht irgendwann einmal der Minutenzeiger über dem Stundenzeiger. Um wie viel Uhr genau ist dies zwischen 7 und 8 Uhr der Fall? (Gib den exakten Wert an, keine Näherung.)

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Gegeben ist eine positive reelle Zahl a . Es wird eine Folge von Zahlen $x_2, x_3, \dots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

- dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und
- dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

2. Aufgabe

Bestimmen Sie alle neunstelligen Zahlen X mit folgenden Eigenschaften:

- Jede der Ziffern $1, 2, \dots, 9$ kommt einmal vor.
- Streicht man von X die letzten sechs Ziffern weg, so bleibt eine durch 3 teilbare Zahl übrig, die genau drei verschiedene Primteiler hat.
- Streicht man von X die ersten sechs Ziffern weg, so bleibt das Doppelte einer durch 3 teilbaren Quadratzahl übrig.
- Streicht man von X die ersten drei und die letzten drei Ziffern weg, so bleibt eine Primzahlpotenz übrig.

Hinweis: Die Zahl $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ hat genau drei verschiedene Primteiler. Auch Primzahlen selbst sind Primzahlpotenzen!

3. Aufgabe

Als *Rhombus* oder *Raute* bezeichnet man bekanntlich ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten.

- Im Rhombus $ABCD$ mit der Seitenlänge a haben die Diagonalen die Längen e und f . Beweisen Sie die Formel $e^2 + f^2 = 4a^2$.
- Nun sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm. Beweisen Sie die Gültigkeit der Parallelogramm-Formel

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 11

1. Aufgabe

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x^2 + 4y = 21 \quad (1)$$

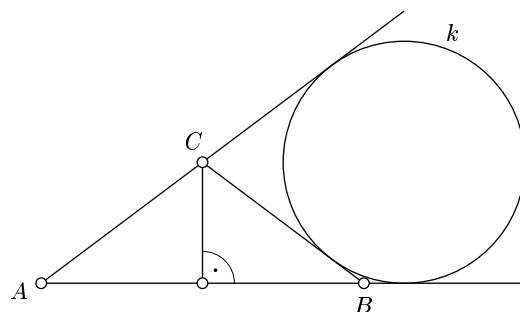
$$y^2 + 4x = 21 \quad (2)$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Das Dreieck ABC sei gleichschenkelig mit den Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Der Ankreis k des Dreiecks ABC berühre die Seite $\overline{BC}$ und die Geraden AC und AB wie in der Abbildung gezeigt.

Man beweise, dass der Radius des Kreises k mit der Länge der Höhe auf der Basis des Dreiecks ABC übereinstimmt.



3. Aufgabe

In seinem Kupferstich „Melancholia I“ hat Albrecht Dürer ein magisches Quadrat abgebildet, das in der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514 enthält (siehe Abbildung a).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abbildung a

	13		
	15	14	

Abbildung b

Bertha beschäftigt sich mit magischen Quadraten. Sie behauptet, dass es ein magisches Quadrat gibt, bei dem die Zahlen 13, 14 und 15 wie in Abbildung b eingetragen sind. Man untersuche, ob diese Behauptung wahr ist.

Hinweis: In ein magisches Quadrat (der Ordnung 4) sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 16 so einzutragen, dass die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden längsten Diagonalen allesamt gleich groß sind.

4. Aufgabe

Gegeben ist eine positive reelle Zahl a . Es wird eine Folge von Zahlen $x_2, x_3, \dots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

- dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und
- dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

23. Essener Mathematikwettbewerb 2007/2008

als zweite Runde der 47. Deutschen Mathematikolympiade

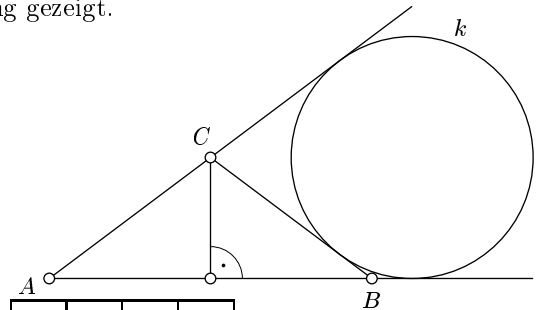
Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 12-13

1. Aufgabe

Das Dreieck ABC sei gleichschenkelig mit den Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Der Ankreis k des Dreiecks ABC berühre die Seite $\overline{BC}$ und die Geraden AC und AB wie in der Abbildung gezeigt.

Man beweise, dass der Radius des Kreises k mit der Länge der Höhe auf der Basis des Dreiecks ABC übereinstimmt.



2. Aufgabe

In seinem Kupferstich „Melancholia I“ hat Albrecht Dürer ein magisches Quadrat abgebildet, das in der unteren Zeile das Entstehungsjahr 1514 enthält (siehe Abbildung a).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Abbildung a

	13		
	15	14	

Abbildung b

Bertha beschäftigt sich mit magischen Quadraten. Sie behauptet, dass es ein magisches Quadrat gibt, bei dem die Zahlen 13, 14 und 15 wie in Abbildung b eingetragen sind. Man untersuche, ob diese Behauptung wahr ist.

Hinweis: In ein magisches Quadrat (der Ordnung 4) sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 16 so einzutragen, dass die Summen der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden längsten Diagonalen allesamt gleich groß sind.

3. Aufgabe

Eine positive ganze Zahl n soll „stämmig“ genannt werden, wenn der Bruch $\frac{1}{n}$ auf genau zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Brüche $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{\ell}$ mit positiven ganzen Zahlen k, ℓ und $k \leq \ell$ darstellbar ist.

Man beweise, dass genau die Primzahlen stämmig sind.

4. Aufgabe

Gegeben ist eine positive reelle Zahl a . Es wird eine Folge von Zahlen $x_2, x_3, \dots$ aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

- dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und
- dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.