24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

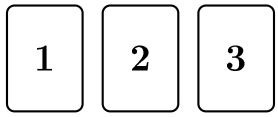
als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Mit diesen (nebenstehend abgebildeten) drei Kärtchen kannst du, wenn du sie hintereinander legst, verschiedene dreistellige Zahlen bilden.



a) Gib alle diese Zahlen an.

b) Fasse in einer Tabelle zusammen, durch welche der Zahlen von 2 bis 12 deine gefundenen Zahlen jeweils teilbar sind.

Jetzt sollst du überlegen, welche Zahlen entstehen können, wenn du je zwei verschiedene deiner gefundenen Zahlen addierst.

c) Gib die größte und die kleinste so erzielbare Summe an.

d) Findest du unter den Zahlen aus dem Aufgabenteil a) Paare, deren Summe eine Zahl ist, bei der alle Ziffern gleich sind?

e) Gibt es eine Summe, die durch 12 teilbar ist? Wenn du eine solche Summe findest, dann gib das Paar der Zahlen an, aus der sie entstehen.

2. Aufgabe

I) Zeichne auf deinem Blatt jeweils ein Quadrat und ein Dreieck so, dass sie
  a) keinen gemeinsamen Punkt,
  b) einen gemeinsamen Punkt,
  c) zwei gemeinsame Punkte,
  d) drei gemeinsame Punkte,
  e) vier gemeinsame Punkte,
  f) fünf gemeinsame Punkte

  aufweisen.

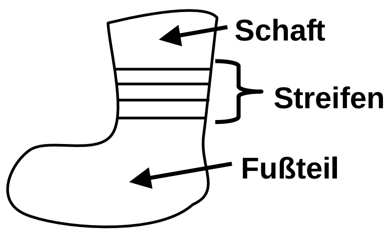
II) Zeichne zwei Dreiecke so, dass die sich schneidenden Dreiecke eine Figur mit
  a) drei Teilflächen,
  b) vier Teilflächen,
  c) fünf Teilflächen,
  d) sechs Teilflächen,
  e) sieben Teilflächen

  bilden.

3. Aufgabe

Oma Streifstrumpf strickt für Peppi neue Socken. Peppi hat drei Lieblingsfarben und zwar rot, gelb und blau, die alle in den drei Streifen vorkommen sollen.

a) Die Oma hat Wolle in diesen drei Farben gekauft. Sie überlegt, wie der Streifenteil aussehen kann. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Oma Streifstrumpf dafür?



b) Fußteil und Schaft sollen jetzt die gleiche Farbe bekommen, aber die drei Streifen sollen erkennbar sein. Wie viele verschiedene Socken kann die Oma aus den drei Farben jetzt stricken?

c) Peppi entdeckt noch lila Wolle in Omas Strickkiste, und sie möchte jetzt Socken mit vier Streifen mit den vier Farben lila, rot, gelb und blau. Oma weiß, dass die Socken von Peppi immer ziemlich dreckig werden und will Fußteil und Schaft nun in schwarz stricken. Diese Wollfarbe hat sie immer in ihrer Strickkiste. Wie viele verschiedene Socken könnte die Oma jetzt für Peppi stricken? Versuche, die Anzahl der Möglichkeiten zu berechnen und nicht alle möglichen Socken zu malen.

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Christian erklärt Sarah , dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt. „*Arm* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. *Reich* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“ Dazu muss man wissen, was ***Teiler*** und ***echte Teiler*** einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was ***Teiler*** sind:

- 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
- 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
- Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
- Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler!

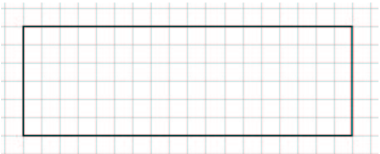
Die ***echten Teiler*** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst. (Beispiel: 30 hat die ***Teiler*** 1, 2, 3, 5, 10, 15 und 30 und die ***echten Teiler*** 2, 3, 5, 6, 10 und 15. Die Summe der echten Teiler der 30 ist dann 41.)

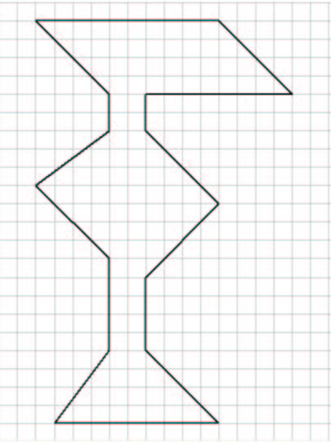
a) Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 *reiche* Zahlen?“

b) Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen von 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte reiche Zahl gesucht, nicht die „*reichste*“!)

c) Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die *ärmsten* Zahlen!“ Stimmt das?

2. Aufgabe





In einer Quizfrage gab es 300 Punkte für die schnelle Beantwortung der Frage: Welche der beiden Figuren hat den größeren Flächeninhalt, das Rechteck oder die rechte Figur, das Große F? Die richtige Antwort wurde tatsächlich schnell gegeben: Das Große F hat den größeren Flächeninhalt.

a) Um wie viele Kästchen ist der Flächeninhalt des Großen Fs größer als der des Rechtecks?

b) Zerlege das Große F so, dass man aus den erhaltenen Teilen das Rechteck legen kann und nur zwei Teile übrig bleiben. Versuche, mit möglichst wenigen Teilen auszukommen.

c) Stell' dir vor, dass aus neun der Großen Fs neun Rechtecke gelegt wurden.
Lässt sich dann aus den Reststücken noch einmal dieses Rechteck legen? Geht es ohne zusätzliche Schnitte?

3. Aufgabe

Bei einem 10 000-m-Lauf im Stadion wird die Bahn, die ja 400 m lang ist, 25-mal umrundet. Im Vorlauf treten vier Läufer an. Sie starten auch gleichzeitig.

- Läufer A will ganz gleichmäßig laufen, jede Runde in 80 Sekunden.
- Läufer B sagt sich: Die ersten 13 Runden laufe ich 85 Sekunden pro Runde, dann werde ich schneller und laufe die letzten 12 Runden in je 75 Sekunden.
- Läufer C plant: Die erste Runde in 90 Sekunden und dann jede Runde eine Sekunde schneller als die Runde zuvor.
- Läufer D schließlich hat einen raffinierten Plan: Egal wer führt, ich will in jeder Runde grundsätzlich genau zwei Sekunden langsamer als der Führende laufen, und in der letzten Runde drehe ich mächtig auf und laufe sie in 60 Sekunden.

a) Wer gewinnt – und in welcher Zeit?

b) Übrigens: Der Letzte wird nicht in den Endlauf kommen. Wer ist es?

c) Gab es Überrundungen?

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

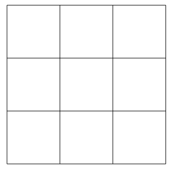
Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Drei Hasen wiegen zusammen 10 Kilogramm. Der zweite Hase ist um ein Drittel schwerer als der erste Hase, der dritte Hase ist um ein Viertel leichter als der zweite Hase. Wie schwer ist jeder der drei Hasen? Weise nach, dass deine Ergebnisse die Angaben im Aufgabentext erfüllen.

2. Aufgabe



Trägt man Zahlen so in die neun Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung rechts) ein, dass die Summen der Zahlen in jeder (waagerechten) Zeile, in jeder (senkrechten) Spalte und in jeder der beiden Diagonalen untereinander gleich sind, erhält man ein sogenanntes *magisches Quadrat*. Die „untereinander gleiche" Summe heißt *magische Zahl* des Quadrats.

Zu gegebenen neun Zahlen, mit denen man ein magisches Quadrat bilden kann, gibt es nur eine magische Zahl.

a) Trage die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in ein 3×3-Quadrat ein, dass ein magisches Quadrat entsteht, und gib die magische Zahl an.

b) Untersuche, in welchen der neun Felder eines magischen Quadrates die Zahl 1 stehen kann.

c) Untersuche, welche Zahlen im Zentrum – also im Mittelfeld – des magischen Quadrates stehen können.

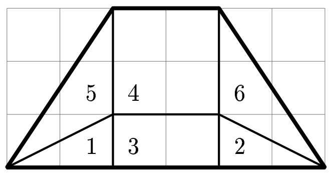
d) Es seien die neun Zahlen eines magischen Quadrates mit den Variablen a, b, …, i bezeichnet (siehe rechte Abbildung). Wie kann man e berechnen, wenn man die magische Zahl s kennt?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Hinweis: Benutze hierfür die vier verschiedenen Summen, in denen e als Summand enthalten ist.

3. Aufgabe

Zeichne das rechts auf einem Quadratraster abgebildete gleichschenklige Trapez auf ein Stück Papier oder Zeichenkarton und zerschneide es in die angegebenen sechs Teile. Lege jeweils aus allen diesen sechs Teilen



a) ein Rechteck, das kein Quadrat ist,

b) ein Parallelogramm, das kein Rechteck ist,

c) ein rechtwinkliges Dreieck.

Dabei dürfen die Teile auch umgedreht werden.

Die Aufgabe ist vollständig gelöst, wenn jeweils eine Möglichkeit gezeichnet wurde.

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Ein Flugzeug hat vor dem Start ein Gesamtgewicht von 100 Tonnen. Davon entfallen auf Passagiere und Gepäck zusammen ein Siebentel und es entfällt ein Drittel des Gesamtgewichts auf den Treibstoff, der für einen Nonstop-Flug von 3500 Kilometern ausreichend ist. Nach der Landung beträgt der Anteil von Passagieren und Gepäck am Gesamtgewicht zusammen ein Fünftel.

Wie lang war die Flugstrecke?

2. Aufgabe

Über ein Dreieck ABC und über die Punkte D, E und F wird vorausgesetzt:

(1) Der Punkt D liegt auf der Seite $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ ist eine Winkelhalbierende des Dreiecks ABC.
(2) Der Punkt E liegt auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über B hinaus und die Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ sind gleich lang.
(3) Der Punkt F liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CF}$ sind gleich lang.

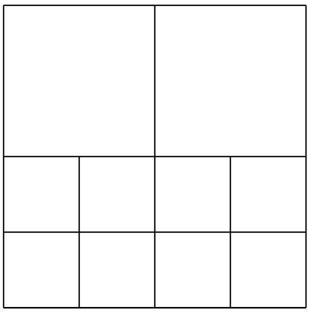
Beweise: Aus diesen Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke AED und ADF in den Größen ihrer Innenwinkel übereinstimmen.

3. Aufgabe

Ein Quadrat soll in n Teilquadrate zerlegt werden.

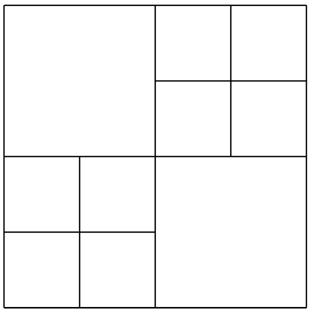
Die Abbildungen zeigen drei Zerlegungen eines Quadrates in 10 Teilquadrate. Bei diesen Zerlegungen treten verschieden große Teilquadrate auf. Daher kann man die Anzahl 10 jeweils als Summe von Zahlen darstellen, die die Anzahlen der verschieden großen Teilquadrate angeben. Beginnt man dabei mit der Anzahl der kleinsten Teilquadrate, dann erhält man die unter den Abbildungen angegebenen Summen.

Bei den ersten beiden Zerlegungen sind die auf diese Weise geordneten Summanden 8 und 2 gleich. Zwei Zerlegungen werden als gleich bezeichnet, wenn sie sich nur in der Anordnung der Teilquadrate, nicht aber in deren Anzahl oder Größe unterscheiden. Die dritte Zerlegung mit den geordneten Summanden 4, 3 und 3 ist daher von den ersten beiden Zerlegungen verschieden.



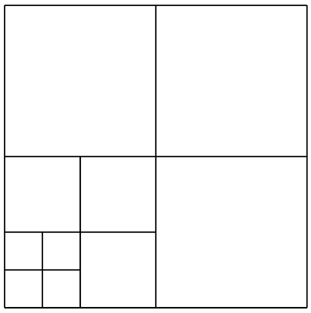
$10 = 8 + 2$

$(A1)$



$10 = 8 + 2$

$(A2)$



$10 = 4 + 3 + 3$

$(A3)$

a) Nenne eine Möglichkeit, wie man eine Zerlegung in n Teilquadrate finden kann, wenn n eine Quadratzahl ist.
b) Gib eine Zerlegung eines Quadrates in 6 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.
c) Gib zwei verschiedene Zerlegungen eines Quadrates in 13 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.
d) Katja behauptet: Wenn die Zerlegung eines Quadrats in n Teilquadrate möglich ist, dann ist stets auch eine Zerlegung in $(n + 3)$ Teilquadrate möglich.
Hat Katja Recht? Begründe deine Entscheidung.

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0;0)$, $B(117;44)$, $C(21;72)$.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Seitenhalbierenden, des Höhenschnittpunkts H und des Umkreismittelpunkts U.

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a die Ungleichung

$$a \leq a^2 + \frac{1}{3} \tag{1}$$

erfüllt ist.

Gibt es reelle Zahlen a, für welche in (1) Gleichheit gilt?

3. Aufgabe

In einem Würfel, der drei Teilwürfel hoch, drei Teilwürfel breit und drei Teilwürfel lang ist, schlüpft in der Mitte eines Teilwürfels eine Raupe. Diese frisst sich nun jeweils von der Mitte eines Teilwürfels kantenparallel bis zur Mitte eines benachbarten Teilwürfels durch, wo sie sich entweder häutet oder verpuppt. (Dabei heißen zwei Teilwürfel genau dann benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seitenfläche haben.) Nach jeder ihrer Häutungen ändert sie ihre Richtung und setzt die Reise fort.

Insgesamt häutet sich die Raupe 25-mal, bevor sie sich verpuppt und so ihre Reise beendet.

Man beweise, dass es einen Teilwürfel gibt, in dem die Raupe nicht gewesen ist.

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

<u>1. Aufgabe</u>
Zeigen Sie, dass es unendlich viele Beispiele für fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen gibt, von denen keine eine Primzahl ist.

<u>2. Aufgabe</u>
Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0; 0)$, $B(117; 44)$, $C(21; 72)$.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Seitenhalbierenden, des Höhenschnittpunkts H und des Umkreismittelpunkts U.

<u>3. Aufgabe</u>
Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a die Ungleichung

$$a \leq a^2 + \frac{1}{3} \tag{2}$$

erfüllt ist.

Gibt es reelle Zahlen a, für welche in (1) Gleichheit gilt?

24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

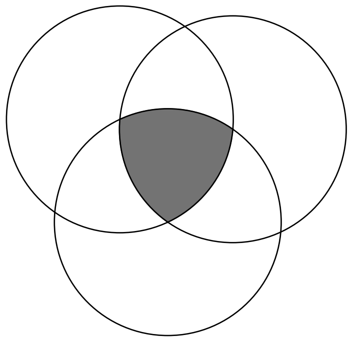
als erste Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klassen 11 - 13

<u>1. Aufgabe</u>

Drei Kreise mit gleichem Radius schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand der beiden anderen Kreise liegt, siehe Abbildung.

Man bestimme den Flächeninhalt der grauen Fläche.



<u>2. Aufgabe</u>

Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$a \cdot x + b \cdot y = 10$$

genau dann reelle Lösungen hat, wenn $a^2 + b^2 \geq 4$.

<u>3. Aufgabe</u>

Eine natürliche Zahl z sei im dekadischen Positionssystem geschrieben 100-stellig,

$$z = \overline{x_1 x_2 \ldots x_{100}}, \qquad x_1 \neq 0,$$

und besitze folgende Eigenschaften (i) und (ii):

(i) Die Ziffern $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ bilden eine monoton fallende Folge,

$$9 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{100}.$$

(ii) Quersumme und Querprodukt von z stimmen überein,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{100}.$$

a) Man zeige, dass die Dezimaldarstellung von z mindestens 93 Einsen enthält.

b) Man bestimme alle Zahlen z mit den angegebenen Eigenschaften.