# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 5

1. Aufgabe

Beim Schulsportfest trugen die fünf Freundinnen Anja, Bea, Clara, Dana und Elke untereinander einen Wettbewerb im Weitsprung aus. Alle zusammen schafften 15,20 m.

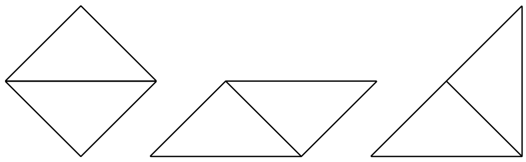
Anja und Bea sprangen zusammen 6 m, wobei Bea 60 cm weiter sprang als Anja. Elke sprang 40 cm weniger weit als Dana, beide zusammen schafften 6,40 m.

a) Wie weit sprang Anja?
b) Wie weit sprang Clara?
c) Gib alle fünf Sprungweiten an und ordne sie. Stimmt es, dass Beate gewonnen hat und dass Anja Letzte geworden ist?

Weise durch eine Probe am Text nach, dass deine Ergebnisse richtig sind.

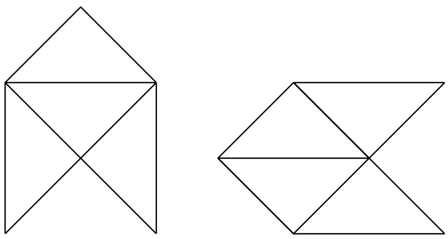
2. Aufgabe

Aus gleichschenkligen Dreiecken (4 Kästchenlängen breit und 2 Kästchenlängen hoch) sollen zusammenhängende Figuren so gelegt werden, dass immer zwei Seiten vollständig aneinander liegen. Die gesuchten Figuren sollen jeweils unterschiedliche Formen haben. Aus zwei Dreiecken kann man genau die drei nebenstehenden Figuren legen.



a) Aus drei derartigen Dreiecken kann man genau vier verschiedene Figuren legen. Zeichne diese Figuren.
b) Wenn man vier dieser Dreiecke verwendet, so kann man 14 verschiedene Figuren legen. Zeichne alle anderen Figuren.

*Hinweis*: Es kommt *innerhalb* einer Figur nicht auf die Lage der Einzeldreiecke an! Das Beispiel zeigt die gleiche Figur, obwohl innerhalb der Figur die Einzeldreiecke anders liegen.



3. Aufgabe

Max malt mit seinem kleinen Bruder Moritz. Sie wollen in der Raupe (siehe nebenstehende Abbildung) jeden Kreis mit einer Farbe ausmalen.

a) Sie haben die Farben rot und blau, den Kopf aber wollen sie weiß lassen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Farbverteilung?
b) Nun soll der Kopf doch mit angemalt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn drei Kreise rot und zwei Kreise blau ausgemalt werden sollen?
c) Moritz möchte eine ganz bunte Raupe zeichnen. Er verwendet zum Ausmalen der fünf Kreise fünf verschiedene Farben. Wie viele verschiedene Raupen könnte Moritz zeichnen?
   *Vorsicht*: Es muss gerechnet werden, weil es ziemlich viele sind.

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 6

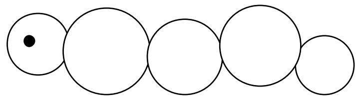
<u>1. Aufgabe</u>

Laura, Jan und Kai essen gerne Gummibärchen.

a) Laura hat doppelt so viele weiße wie rote Bärchen und doppelt so viele rote wie gelbe Bärchen. Zusammen sind es 35. Wie viele Bärchen sind es von jeder Farbe?

b) Kai hat 38 Bärchen. Er weiß, dass er eineinhalbmal so viele gelbe wie rote Bärchen hat und auch eineinhalbmal so viele rote wie weiße. Wie viele Bärchen hat Kai von jeder Farbe?

<u>2. Aufgabe</u>



Nebenstehende Abbildung zeigt ein Rechteck, das in 16 kleine Dreiecke zerlegt ist und das weitere Dreiecke unterschiedlicher Größe enthält, die sich aus den kleinen Dreiecken zusammensetzen lassen.

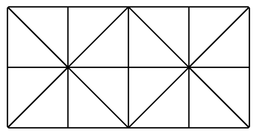
a) Wie viele unterschiedliche Dreiecksgrößen kommen vor?
Aus wie vielen kleinen Dreiecken bstehen sie jeweils?

b) Gib für jede von dir gefundene Dreiecksgröße die Anzahl der vorhandenen Dreiecke an.

c) Zerlege das Rechteck so, dass sich aus allen Teilen ein Quadrat ergibt, und lege dieses Quadrat zusammen.

d) Kann man aus allen Teilen auch ein Dreieck legen?
Wenn ja, dann zeichne ein solches Dreieck. Wenn nein, dann begründe.

<u>3. Aufgabe</u>



Wir wollen uns Zahlen etwas genauer ansehen.

a) Gib alle Zahlen von 20 bis 99 an, bei denen die Summe der Ziffern größer ist als das Produkt der Ziffern.

b) Ermittle alle dreistelligen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:
   (1) Die Summe der Ziffern der Zahl ist gleich dem Produkt der Ziffern.
   (2) Alle Ziffern sind verschieden.
   (3) Alle Ziffern sind kleiner als 5.

c) Wie viele dreistellige Zahlen haben die Quersumme 9?
*Hinweis*: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe aller Ziffern dieser Zahl.

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 7

1. Aufgabe

Drei Lehrer mit den Namen Bergmann, Schröter und Voigt erteilen Unterricht in jeweils genau zwei der Fächer Chemie, Deutsch, Englisch, Französisch, Geschichte und Physik. Jedes der sechs Fächer wird von genau einem der drei Lehrer unterrichtet. Außerdem ist bekannt:

(1) Herr Voigt verbrachte mit dem Geschichtslehrer den Sommerurlaub in Spanien.

(2) Herr Schröter sowie der Deutschlehrer und der Französischlehrer kommen oft mit dem Auto zur Schule.

(3) Herr Schröter ist kein Geschichtslehrer.

(4) In der Freizeit spielen der Physiklehrer, der Chemielehrer und Herr Bergmann gern Basketball.

(5) Herr Schröter und der Physiklehrer haben einen Garten.

(6) Herr Voigt und der Deutschlehrer gehen gern ins Theater.

Weise nach: Aus diesen Angaben lässt sich eindeutig ableiten, welcher der genannten Lehrer welche der genannten Fächer unterrichtet. Gib diese Zuordnung an.

2. Aufgabe

Eine Treppe ist zwischen 15 und 20 Meter hoch, wobei die Stufenhöhe genau 15 cm beträgt.

Fritzchen steigt die Hälfte der Stufen hoch, dann ein Drittel des Restes und schließlich ein Achtel der noch übrig gebliebenen Stufen. Dann ist er aber immer noch nicht ganz oben.

Wie hoch ist die gesamte Treppe, und wie viele Stufen muss Fritzchen noch hochsteigen?

3. Aufgabe

Wir betrachten ein Viereck $ABCD$, von dem gefordert wird:

(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

a) Außerdem wird vorausgesetzt:

(2) $H$ ist ein Punkt auf der Seite $\overline{AB}$.

(3) Die durch $B$ verlaufende Parallele zu $\overline{DH}$ schneidet die Seite $\overline{CD}$ im Punkt $K$.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{BH}$ und $\overline{DK}$ stets gleich lang sind und dass die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{HK}$ den gleichen Mittelpunkt haben.

b) An Stelle der Voraussetzungen (2) und (3) in Teilaufgabe a) wird über das Parallelogramm $ABCD$ nun vorausgesetzt:

(2*) Die Halbierenden der Winkel $BAD$ und $CBA$ schneiden einander in einem Punkt auf der Seite $\overline{CD}$. Dieser Punkt sei mit $E$ bezeichnet.

(3*) Die Strecke $\overline{AE}$ hat eine Länge von 6 cm und die Strecke $\overline{BE}$ hat eine Länge von 4 cm.

Begründe, dass der Winkel $\sphericalangle BEA$ $90^\circ$ beträgt und ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 8

1. Aufgabe

Fritz und Laura spielen das folgende Würfelspiel:

Jeder Spieler erhält zwei übliche Spielwürfel und darf Würfe mit beiden Würfeln oder auch nur mit einem der beiden Würfel durchführen. Die gewürfelte Punktanzahlen werden addiert. Ziel ist es, genau die Punktsumme 30 zu erreichen.

a) Fritz hat zunächst immer mit beiden Würfeln gewürfelt und dabei 25 Punkte erreicht. Soll er beim nächsten Wurf wieder beide Würfel oder nur einen verwenden, um bei diesem Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen? Begründe deinen Ratschlag.

b) Laura hat 22 Punkte erreicht.
Welche maximale Chance hat Laura, im nächsten Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen?

2. Aufgabe

Katharina wird gefragt, wie viele Geschwister sie habe. Sie antwortet:

„Die Anzahl der zu unserer Familie gehörenden Kinder ist gleich dem ganzzahligen Lebensalter unseres Jüngsten. Der Altersunterschied zwischen den Geschwistern beträgt stets genau zwei Jahre. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter eines jeden Kindes angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die gleich dem neunfachen Lebensalter des Jüngsten ist. Nun könnt ihr errechnen, wie viele Kinder zu unserer Familie gehören und wie alt sie sind.“

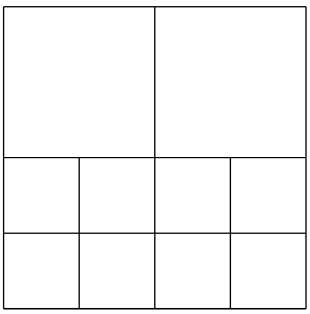
Weise nach, dass diese Aufgabe genau eine Lösung hat, und gib Alter und Anzahl der Kinder an.

3. Aufgabe

Ein Quadrat soll in $n$ Teilquadrate zerlegt werden.

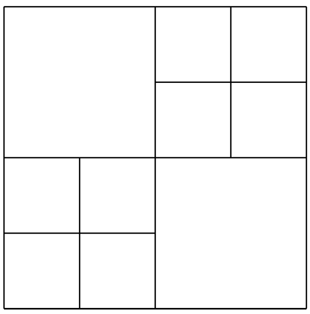
Die Abbildungen zeigen drei Zerlegungen eines Quadrats in 10 Teilquadrate. Bei diesen Zerlegungen treten verschieden große Teilquadrate auf. Daher kann man die Anzahl 10 jeweils als Summe von Zahlen darstellen, die die Anzahlen der verschieden großen Teilquadrate angeben. Beginnt man dabei mit der Anzahl der kleinsten Teilquadrate, dann erhält man die unter den Abbildungen angegebenen Summen.

Bei den ersten beiden Zerlegungen sind die auf diese Weise geordneten Summanden 8 und 2 gleich. Zwei Zerlegungen werden als gleich bezeichnet, wenn sie sich nur in der Anordnung der Teilquadrate, nicht aber in deren Anzahl oder Größe unterscheiden. Die dritte Zerlegung mit den geordneten Summanden 4, 3 und 3 ist daher von den ersten beiden Zerlegungen verschieden.



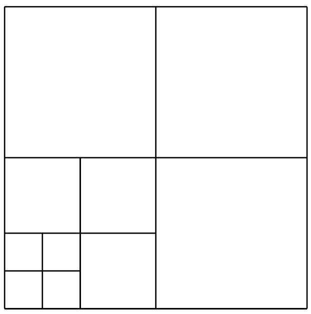
$10 = 8 + 2$

$(A1)$



$10 = 8 + 2$

$(A2)$



$10 = 4 + 3 + 3$

$(A3)$

a) Gib eine Zerlegung eines Quadrats in 7 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.

b) Gib drei verschiedene Zerlegungen eines Quadrats in 12 Teilquadrate sowie die zugehörigen geordneten Summanden an.

c) Die Zerlegung eines Quadrats in $(n =)\ m^2$ gleich große Teilquadrate nennen wir eine $m^2$-Zerlegung, wobei $m > 1$ gelten soll.
Beweise folgende Aussage: Von einer $m^2$-Zerlegung eines Quadrats kann man durch Löshen einieger Zerlegungslinien stets eine Zerlegung dieses Quadrats in $2m$ Teilquadrate erzeugen.

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

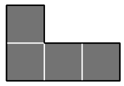
## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 9

1. Aufgabe

Von einem $n \times n$-Schachbrett mit $n \in \{3; 5; 7; 9\}$ wird das mittlere Feld entfernt.

Zeigen Sie für jede dieser Zahlen $n$, dass man die übrige Fläche in Teile der in der Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegen kann.



2. Aufgabe

Eine Schulklasse hat in der ersten Stunde Mathematikunterricht. Nicht alle der 33 Schüler sind anwesend. Die Lehrerin lässt die Schüler in vier Gruppen arbeiten, wobei in jeder der Gruppen die gleiche Anzahl von Mädchen ist. Über die Anzahl der Jungen in jeder Gruppe ist nichts bekannt, insbesondere müssen die Gruppen nicht gleich groß sein.

Nach der Stunde fühlt sich ein Mädchen nicht wohl und geht nach Hause. Es folgt eine Deutschstunde, in welcher der Lehrer die Schüler in drei Gruppen einteilt. Diese Gruppen haben einen Mädchenanteil von 75 %, 60 % bzw. 30 %.

Wie viele Mädchen waren in der Mathematikstunde anwesend?

Begründen Sie Ihre Antwort!

3. Aufgabe

a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare $(a, b)$, für die $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare $(a, b)$ reeller Zahlen stets $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt.

c) Wann gilt in b) das Gleichheitszeichen?

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

## Klasse 10

1. Aufgabe

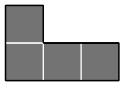
a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare $(a, b)$, für die $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare $(a, b)$ reeller Zahlen stets $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt.

c) Wann gilt in b) das Gleichheitszeichen?

2. Aufgabe

Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$-Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll in L-Stücke der in der Abbildung gezeigten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.



a) Bestimmen Sie für $n \in \{3; 5; 7; 9\}$ jeweils eine solche Zerlegung.

b) Zeigen Sie, dass für beliebiges ungerades $n$ mit $n \geq 3$ die Zerlegung des $n \times n$-Schachbretts ohne mittleres Feld in eine gerade Anzahl von L-Stücken möglich ist.

c) Leiten Sie aus Aussage b) her, dass jede ungerade Quadratzahl bei Division durch 8 den Rest 1 lässt.

3. Aufgabe

Seien $A$ und $B$ zwei verschiedene Punkte in der Ebene. Gesucht sind Punkte $C$, für die es einen Kreis $k_A$ durch $A$ und einen Kreis $k_B$ durch $B$ derart gibt, dass beide Kreise gleich groß sind und sich in $C$ berühren.

a) Geben Sie für $|AB| = 3\,\text{cm}$ und einen Punkt $C$ auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ im Abstand von $2\,\text{cm}$ zu $\overline{AB}$ eine Beschreibung für die Konstruktion von Kreisen $k_A$ und $k_B$ mit den geforderten Eigenschaften.

b) Finden Sie alle Punkte $C$ auf der Geraden $AB$ mit dieser Eigenschaft.

# 24. Essener Mathematikwettbewerb 2008/2009

als zweite Runde der 48. Deutschen Mathematikolympiade

## Aufgaben der zweiten Runde

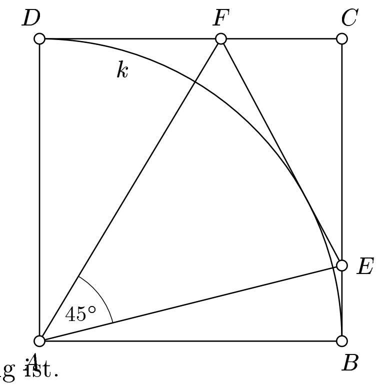
## Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y^2 - 2x + 1 = 0.$$

2. Aufgabe




Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Der Punkt $E$ liege auf der Seite $\overline{BC}$ und der Punkt $F$ auf der Seite $\overline{CD}$. Es sei $k$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $A$ und dem Radius $|AB|$. Siehe auch nebenstehende Abbildung.

a) Man beweise: Wenn $\overline{EF}$ den Kreis $k$ berührt, dann ist $|\sphericalangle EAF| = 45°$.

b) Man beweise: Gilt $|\sphericalangle EAF| = 45°$, dann berührt $\overline{EF}$ den Kreis $k$.

3. Aufgabe

Ein Dreieck habe ganzzahlige Seitenlängen $a, b, c$. Jede dieser Zahlen sei Teiler des Dreiecksumfangs $u$. Man beweise, dass dann das Dreieck gleichseitig ist.

4. Aufgabe

Es seien $a_1$ und $a_2$ positive reelle Zahlen. Man ermittle in Abhängigkeit von $a_1$ und $a_2$ alle positiven reellen Zahlen $x$, die die Ungleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 + a_2 - x} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

erfüllen.