

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Wir rechnen mit Zeiten.

- a) René fährt zu Hause um 15:30 Uhr zur Mathe-AG los; die AG beginnt um 16:00 Uhr. Unterwegs schaut er auf die Uhr und stellt fest: In 10 Minuten wird doppelt so viel Zeit vergangen sein, wie es bis zum Beginn der Arbeitsgemeinschaft dann noch sind.
Wie spät ist es gerade?
- b) René denkt unterwegs weiter: „Ich suche den Zeitpunkt, an dem gilt: Bis 17:00 Uhr sind es noch dreimal so viele Minuten wie seit 14:00 Uhr bereits vergangen sind.“
Welcher Zeitpunkt ist dies?
- c) René hat sich für die Regionallrunde der Mathematik-Olympiade qualifiziert. Diese beginnt bei ihm am 11. November 2009 um 08:00 Uhr.
Welches Datum und welche Uhrzeit haben wir 2009 Minuten später?

2. Aufgabe

Judith, Hanna und Katrin haben jeweils Mütze, Schal und Handschuhe in einer Farbe; Judith in blau, Hanna in grün und Katrin in orange.

Im Dezember tauschen Judith, Hanna und Katrin Mütze, Schal und Handschuhe. Die Handschuhe werden nicht einzeln getauscht, so dass jedes Mädchen gleichfarbige Handschuhe trägt. Am Nikolaustag konnte man die folgenden Beobachtungen machen:

- (1) Nur Judith ist dreifarbig gekleidet, sie trägt ihre eigenen Handschuhe.
- (2) Bei Hanna haben Schal und Mütze nicht die gleiche Farbe.
- (3) Katrin trägt Hannas Mütze.

Welche Farben haben Mütze, Schal und Handschuhe, die Judith trägt, welche Farben tragen Hanna und Katrin?

3. Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es um zwei gleich große Kreise, die einander berühren, und um Geraden, die sich schneiden.

Zeichne für jede Teilaufgabe zunächst zwei Kreise, die sich berühren.

- a) Zeichne nun je zwei Geraden so, dass
 - (1) sie einander schneiden und keinen gemeinsamen Punkt mit den Kreisen haben,
 - (2) sie einander schneiden und jeweils genau einen gemeinsamen Punkt mit jeweils einem der Kreise haben.
- b) Nun sollen die beiden Geraden zusammen drei gemeinsame Punkte mit den Kreisen haben.
Zeichne je zwei Geraden so, dass sie sich schneiden und
 - (1) ein Kreis zwei gemeinsame Punkte mit den Geraden hat und der andere Kreis nur einen gemeinsamen Punkt,
 - (2) eine Gerade die drei gemeinsamen Punkte mit den Kreisen hat und die andere keinen.
- c) Nun sollen drei Geraden gezeichnet werden, die sich in einem Punkte schneiden.
 - (1) Zeichne die erste Gerade so, dass sie mit jedem der beiden Kreise genau einen Punkt gemeinsam hat. Zeichne die anderen beiden Geraden so, dass sich die drei Geraden außerhalb der Kreise in einem Punkt schneiden und insgesamt fünf gemeinsame Punkte mit den Kreisen haben.
 - (2) Erfülle Aufgabe c) (1) so, dass das Bild symmetrisch ist.

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Annika hat vier Karten, auf denen jeweils eine der Primzahlen 2, 3, 5 und 7 steht. Sie will mit diesen Karten Zahlen bilden und dabei eine oder mehrere Karten benutzen. In einer zu bildenden Zahl darf keine Karte mehrfach benutzt werden.

- Bestimme alle durch 4 teilbaren Zahlen, die Annika bilden kann.
Ordne die Zahlen der Größe nach, beginne mit der kleinsten Zahl.
- Bestimme alle durch 6 teilbaren Zahlen, die Annika bilden kann.
Ordne die Zahlen der Größe nach, beginne mit der kleinsten Zahl.
- Bestimme alle durch 8 teilbaren Zahlen, die Annika bilden kann.
Ordne die Zahlen der Größe nach, beginne mit der kleinsten Zahl.
- Schließlich bildet Annika noch alle durch 3 teilbaren Zahlen.
Bestimme diese Zahlen und ordne sie der Größe nach, beginne mit der kleinsten Zahl.

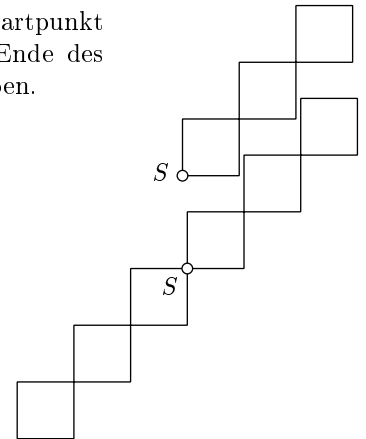
2. Aufgabe

Wenn man einen Roboter (oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Kästchengitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen:

- G – ändere deine Richtung nicht und gehe eine Kantenlänge,
- L – drehe dich nach links um 90° und gehe eine Kantenlänge,
- R – drehe dich nach rechts um 90° und gehe eine Kantenlänge.

Grundsätzlich soll am Anfang der Roboter mit dem „Gesicht nach rechts“ stehen. Wenn er also von dort nach oben laufen soll, lautet das erste Kommando „L“, wenn er von dort nach rechts laufen soll, lautet das erste Kommando „G“, wenn er vom Anfang nach unten laufen soll, lautet das erste Kommando „R“.

- Der Roboter soll die nebenstehende Figur, die „Dreifachschleife“, vom Startpunkt S aus durchlaufen, kein Kantenstück mehrmals durchlaufen und am Ende des Durchlaufs mit dem „Gesicht nach unten“ am Startpunkt S stehen bleiben.
Gib für diesen Weg alle möglichen Kommandofolgen an.
- Die nebenstehende Abbildung zeigt die „Sechsfachschleife“ mit dem Punkt S in der Mitte. Der Roboter soll die Sechsfachschleife durch die Wiederholung einer Kommandofolge der Dreifachschleife durchlaufen, wobei allerdings auf die Bedingung verzichtet wird, dass der Roboter nach dem Durchlaufen der ersten Dreifachschleife mit dem „Gesicht nach unten“ am Startpunkt S stehen bleiben muss.
Gib eine Kommandofolge an, die dies leistet.



3. Aufgabe

Du siehst in der Abbildung a ein regelmäßiges Sechseck und in der Abbildung b ein regelmäßiges Achteck. („Regelmäßig“ bedeutet: Alle Seiten sind gleich lang und alle Winkel sind gleich groß.)

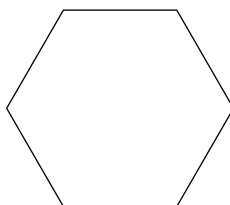


Abbildung a

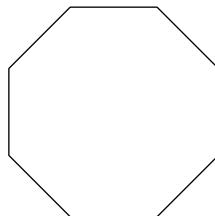


Abbildung b

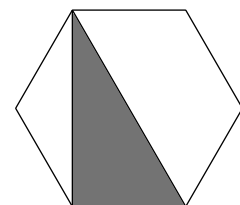


Abbildung c

- Zerlege jeweils das Sechseck und das Achteck in vier gleich große Teile. Fertige jeweils eine Zeichnung an.
- Aus dem Sechseck soll ein Rechteck entstehen. Zerlege dazu das Sechseck in drei Teile, die neu zusammengesetzt dies ermöglichen. Fertige ebenfalls eine Zeichnung an.
- Zeige durch eine Zeichnung, dass die grau gekennzeichnete Dreiecksfläche in Abbildung c ein Drittel der Fläche des Sechsecks einnimmt. Du kannst Hilfslinien einzeichnen oder geeignete Teilflächen umlegen.

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Über drei positive ganze Zahlen a , b , c ist bekannt:

- (1) Für das kleinste gemeinsame Vielfache $\text{kgV}(a; b; c)$ dieser Zahlen gilt

$$\text{kgV}(a; b; c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2.$$

- (2) Für den größten gemeinsamen Teiler $\text{ggT}(a; b; c)$ dieser Zahlen gilt

$$\text{ggT}(a; b; c) = 90.$$

- (3) Es gilt $3a < b < c$.

- (4) Die Zahl b ist eine Quadratzahl.

Ermittle alle Zahlentripel $(a; b; c)$, welche die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen. Weise nach, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

2. Aufgabe

In der Gleichung

$$** \cdot 9* = ***$$

ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen dargestellt. Jedes Sternchen (*) ist so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, dass eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Ermittle alle Lösungen der Aufgabe und beweise, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

3. Aufgabe

Über ein Dreieck ABC wird vorausgesetzt:

- (1) Die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.
- (2) Der Fußpunkt des Lots von A auf die Gerade BC ist F und liegt zwischen B und C .
- (3) Der Winkel FAC ist um 30° größer als der Winkel BAF .

Zeichne eine Planfigur und leite aus den Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC her.

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Über ein Viereck $ABCD$ wird vorausgesetzt:

- (1) $ABCD$ ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.
- (2) Der Winkel BAD hat die Größe $\alpha = 64^\circ$.
- (3) Die Seite $\overline{AD}$ ist 5 cm lang.
- (4) Die Seite $\overline{CD}$ ist 3 cm lang.
- (5) Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist gleich der Summe der Längen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$.

Zeichne das Viereck $ABCD$ und leite aus den Voraussetzungen die Größen der restlichen Innenwinkel des Vierecks ab.

2. Aufgabe

Paul hat beliebig viele Holzwürfel mit den Kantenlängen 1 cm, 2 cm, 3 cm und 4 cm zur Verfügung. Er will aus diesen Würfeln einen größeren Würfel mit der Kantenlänge 5 cm bauen.

Mit welcher *kleinsten* Anzahl an Würfeln gelingt ihm das?

3. Aufgabe

Ermittle alle zweistelligen Zahlen, welche die folgende Bedingung erfüllen:

Addiert man zur Zahl ihre Quersumme und multipliziert diese Summe mit 6, dann erhält man als Ergebnis 180.

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Alf, Barbara, Clara und Danny haben sich gemeinsam eine natürliche Zahl ausgedacht und diese auf einen Zettel geschrieben. Die Klasse soll die Zahl erraten. Dazu macht jede der vier Personen zwei Aussagen über die Zahl. Hier sind die vier Aussagenpaare:

- (A1) Die Zahl ist dreistellig.
- (A2) Das Produkt aller Ziffern der Zahl beträgt 23.
- (B1) Die Zahl ist durch 37 teilbar.
- (B2) Die Zahl besteht aus drei gleichen Ziffern.
- (C1) Die Zahl ist durch 11 teilbar.
- (C2) Die Zahl endet mit einer Null.
- (D1) Die Quersumme der Zahl ist größer als 10.
- (D2) Die Ziffer an der Hunderterstelle ist weder die kleinste noch die größte der drei Ziffern.

Am Ende verraten A , B , C und D noch, dass von ihren beiden Aussagen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch war.

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten für die unbekannte Zahl auf dem Zettel.

2. Aufgabe

Gegeben sind zwei kleine Fässer F_1 und F_2 mit einem Fassungsvermögen von jeweils 10 Litern. In dem Fass F_1 befinden sich 4 Liter der Flüssigkeit A . Im Fass F_2 sind 2 Liter der Flüssigkeit B . Die beiden Flüssigkeiten A und B besitzen die gleiche Dichte und sind miteinander mischbar. Zum Umfüllen steht eine 1-Liter-Kelle zur Verfügung.

Zuerst wird eine volle Kelle von F_1 nach F_2 umgefüllt. Nach dem Umrühren in F_2 wird eine volle Kelle des entstandenen Gemischs nach F_1 zurückgefüllt. Dort wird erneut umgerührt; anschließend wird wieder eine volle Kelle von F_1 nach F_2 umgefüllt.

- a) Berechne den Anteil der Flüssigkeit A am Inhalt des Fasses F_1 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.
- b) Berechne den Anteil der Flüssigkeit B am Inhalt des Fasses F_2 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

Hinweis: Ein ganzzahliges Verhältnis ist ein vollständig gekürzter Bruch.

3. Aufgabe

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b , dem Inkreisradius r und dem Umkreisradius R .

- a) Es wird zunächst der Spezialfall betrachtet, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig-rechtwinklig ist. Beweise, dass dann die Summe $R + r$ gleich der Kathetenlänge a ist.
- b) Nun sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Beweise, dass die Summe $R + r$ gleich dem arithmetischen Mittel der Kathetenlängen, also gleich $\frac{a+b}{2}$, ist.

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Ermittle die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$4y^2 - x^2 = 2y + x \quad (1)$$

$$3y - x = 4 \quad (2)$$

2. Aufgabe

Alf, Barbara, Clara und Danny haben sich gemeinsam eine natürliche Zahl ausgedacht und diese auf einen Zettel geschrieben. Die Klasse soll die Zahl erraten. Dazu macht jede der vier Personen zwei Aussagen über die Zahl. Hier sind die vier Aussagenpaare:

(A1) Die Zahl ist dreistellig.

(A2) Das Produkt aller Ziffern der Zahl beträgt 23.

(B1) Die Zahl ist durch 37 teilbar.

(B2) Die Zahl besteht aus drei gleichen Ziffern.

(C1) Die Zahl ist durch 11 teilbar.

(C2) Die Zahl endet mit einer Null.

(D1) Die Quersumme der Zahl ist größer als 10.

(D2) Die Ziffer an der Hunderterstelle ist weder die kleinste noch die größte der drei Ziffern.

Am Ende verraten A , B , C und D noch, dass von ihren beiden Aussagen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch war.

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten für die unbekannte Zahl auf dem Zettel.

3. Aufgabe

In einem Drachenviereck $ABCD$ haben die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ die Länge a und die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ die Länge b . Das Drachenviereck besitze einen Umkreis k (d. h. alle Eckpunkte A , B , C und D liegen auf diesem Kreis k) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r .

a) Beweise, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$ gleich groß sind.

b) Leite eine Formel zur Berechnung des Umkreisradius aus den Längen a und b her.

c) Es wird ein spezielles Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse $\overline{AC}$ und dem Umkreis k betrachtet. Der Punkt B soll so auf dem Umkreis k liegen, dass eine Parallele zu AC durch diesen Punkt B die Tangente t in B an den Umkreis k ist. Ein Punkt E liege auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus so, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABED$ doppelt so groß ist wie der Inhalt des Vierecks $ABCD$. Berechne die Länge der Strecke $\overline{BE}$ in Abhängigkeit von r .

25. Essener Mathematikwettbewerb 2009/2010

als zweite Runde der 49. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - xy = 2009 \tag{1}$$

$$y^2 - x = 15. \tag{2}$$

2. Aufgabe

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC . Die Spiegelpunkte der Eckpunkte A, B, C am Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck ABC seien A', B' bzw. C' . Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Sechsecks $AC'BA'CB'$.

3. Aufgabe

Für jede positive ganze Zahl n sei

$$x_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}, \quad y_n = \sqrt{4n+2}.$$

- a) Man beweise, dass stets $x_n < y_n$ gilt.
- b) Man beweise, dass x_n und y_n nicht ganzzahlig sind und dass auch zwischen x_n und y_n keine ganze Zahl liegt.