26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

Hier findest du sieben Zahlenfolgen. Sie fangen immer mit den Zahlen 2 und 3 an, gehen dann aber unterschiedlich weiter: Sie sind jeweils nach einer anderen Vorschrift aufgebaut.

Setze jede Zahlenfolge um drei Zahlen fort und gib jeweils die Vorschrift an.

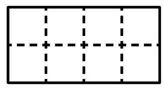
a) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ___, ___, ___
b) 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, ___, ___, ___
c) 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62, ___, ___, ___
d) 2, 3, 4, 3, 5, 7, 5, 8, 11, 8, 12, 16, ___, ___, ___
e) 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ___, ___, ___

2. Aufgabe

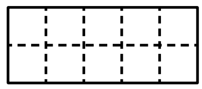
In der Turnhalle der Linden-Schule stehen mehrere gleich lange Bänke. Zwei Gruppen haben gerade gemeinsam Sport. Es setzen sich immer sechs Kinder auf eine Bank, aber die letzte Bank wird nicht voll; da sitzen nur drei Kinder. Wenn sich nur fünf Kinder auf eine Bank setzen würden, dann würden nicht alle Kinder sitzen können, vier von ihnen müssten stehen.

a) Wie viele Kinder sind in der Turnhalle, und wie viele Bänke stehen dort?

Am Ende der Stunde soll Nick aufräumen. Er soll vier Zweierhocker  auf die nebenstehende Fläche stellen.



b) Zeichne alle Möglichkeiten auf, wie er die vier Hocker auf die Fläche stellen kann.
c) Nun kommt Lucas angerannt. Er hat noch einen fünften Zweierhocker gefunden.
   Zeichne wieder alle Möglichkeiten auf, wie sie jetzt die fünf Hocker auf die neue, größere Fläche stellen können.



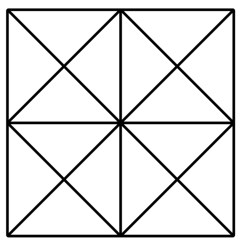
3. Aufgabe

Jens kommt kurz vor seinem Geburtstag zu seinem Opa. Opa holt einen großen Sack mit vielen Münzen und sagt: „Pass' mal auf, Jens. In diesem Sack sind viele Münzen mit allen Werten, die es gibt, also 1 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro und 2 Euro. Du darfst dir davon 20 Münzen aussuchen – halt, stopp, warte – aber du musst aus diesen 20 Münzen zwei Geldbeträge gleichzeitig auf den Tisch legen können; einer soll 5,34 € betragen, der andere 4,66 €. Zehn Euro sind dir also sicher. Ach ja, jeder Münzwert soll bei diesen zehn Euro mindestens einmal vorkommen. So, wie viel Geld schenke ich dir maximal?“

a) Beantworte die Frage für Jens.
b) Wie viel hätte Jens maximal geschenkt bekommen, wenn er die Geldbeträge 5,35 € und 4,65 € hätte legen sollen und Opa immer noch gefordert hätte, dass alle Münzwerte bei den zehn Euro mindestens einmal vorkommen?

4. Aufgabe

Niklas hat die gegebene Figur in der rechten Abbildung gezeichnet und will die in ihr vorkommenden Vierecke zählen. Dazu überlegt er erst einmal, welche verschiedenen Formen und Größen von Vierecken vorkommen; er entschließt sich, sich auf Quadrate, Rechtecke, die keine Quadrate sind, und Parallelogramme, die keine Rechtecke sind, zu beschränken.



Suche nach diesen Quadraten, Rechtecken und Parallelogrammen in der Figur. Dabei sollen sich diese Vierecke in Form oder Größe unterscheiden, sie sollen also nicht deckungsgleich sein.

Zeichne für jedes der verschieden aussehenden Vierecke eine neue Grundfigur und kennzeichne das Viereck farbig. Schreibe neben jede Zeichnung, wie oft man dieses Viereck in der Grundfigur finden kann.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren (PFZ). Zum Beispiel ist $36 = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3 = 2^2{\cdot}3^2$ oder $1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$. Wir nennen in dieser Aufgabe die Anzahl der Primfaktoren einer Zahl ihre Primlänge. Die beiden Zahlen 36 und 1230 haben also beide die Primlänge 4.

a) Welche Primlänge können zweistellige Zahlen höchstens haben?

b) Gib alle zweistelligen Zahlen an, die diese größtmögliche Primlänge aufweisen.

c) Gib alle zweistelligen Zahlen mit der Primlänge 5 an.

2. Aufgabe

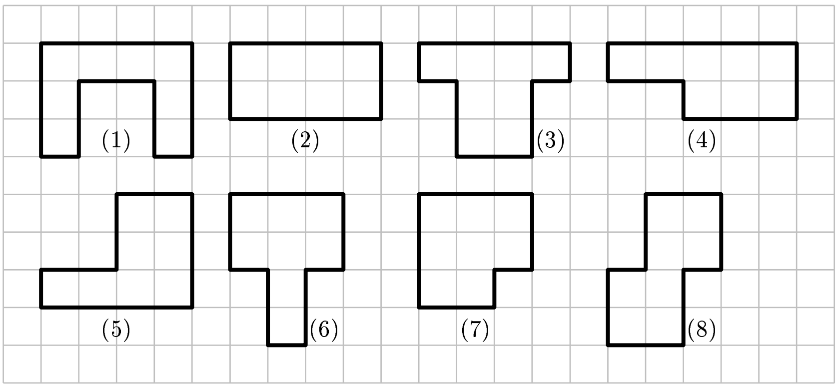
Die drei Freunde Michi, Niki und Omar aus Hamburg kommen zum Abschluss ihrer Schulzeit auf eine ausgefallene Idee. Sie wollen einen Ausflug zur 150 km entfernten Floßburg machen. Das Ausgefallene an ihrem Plan ist, dass sie nur einen Motorroller für zwei Personen zur Verfügung haben. Natürlich können sie auch zu Fuß gehen; ein Fußgänger schafft 5 km in der Stunde. Sie sprechen mehrere Möglichkeiten durch, um ihr Vorhaben umzusetzen.

a) Omar sagt: „Keiner von uns soll laufen. Und wir lassen den Roller ganz gemütlich mit 60 km/h fahren.“ Wie können sie es machen und wie lange dauert es dann, bis alle drei an der Floßburg sind?

b) Das dauert Niki zu lange. Er erklärt sich bereit, zur selben Zeit, in der seine beiden Freunde mit dem Roller zur Floßburg starten, in Hamburg loszulaufen. Er will vier Stunden gehen und dann warten, bis ihn einer seiner Freunde abholt. Er möchte aber auch, dass der Roller solange mit 70 km/h gefahren wird, bis er abgeholt wird; danach soll der Roller mit 65 km/h fahren.
Wie lange wäre dann die Wartezeit für Niki, und wie lange dauert es, bis alle an der Floßburg sind?

3. Aufgabe

In einem Puzzle gibt es acht verschiedene, rechtwinklige, flächengleiche Formen, die jeweils 8 Kästchen umfassen. Von jeder Form sind ausreichend viele Teile vorhanden, die auch gedreht und umgeklappt verwendet werden dürfen.



a) Wähle drei verschiedene Teile aus den 8 Puzzle-Formen aus und lege daraus ein Rechteck. Finde zwei Möglichkeiten, in denen alle drei Puzzle-Formen unterschiedlich sind.

b) Wie viele dieser Rechtecke aus a) benötigst du, um daraus das kleinstmögliche Quadrat zu legen? Wie groß ist die Seitenlänge dieses Quadrates?

c) Wähle fünf verschiedene Formen aus und lege aus diesen fünf Teilen ein Rechteck.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

<u>1. Aufgabe</u>

Tim und Stefanie unterhalten sich und stellen fest, dass die Mathematik-Olympiade dieses Jahr ihren 50. Geburtstag feiert. Darauf meint Stefanie, dass sie ein gutes Rätsel kenne. Tim will es sofort hören. Also sagt Stefanie: „Denke dir eine Zahl und addiere zu ihr 17, multipliziere das Ergebnis mit 3 und subtrahiere deine Zahl. Anschließend subtrahiere 1. Danach dividiere das Ergebnis durch 2 und subtrahiere erneut die von dir gedachte Zahl, abschließend multipliziere mit 2. Wetten, du erhältst 50?“ Obwohl Tim das vorausgesagte Ergebnis erhält, will er nicht glauben, dass jede beliebige Zahl die Geburtstagszahl der Mathematik-Olympiade liefert.

a) Zeige an einem selbstgewählten Beispiel, dass Stefanie bei diesem Beispiel recht hat.

b) Untersuche, ob man bei jeder gedachten Zahl tatsächlich das von Stefanie vorausgesagte Ergebnis erhält.

<u>2. Aufgabe</u>

Auf einem Tisch stehen 4 geschlossene Kästchen. Eines davon enthält Goldklumpen, eines Sand, eines Kieselsteine und eines Holzkugeln. Drei dieser Kästchen sind beschriftet. Auf einem steht „Gold oder Sand“, auf einem anderen „Kieselsteine oder Holz“ und auf dem dritten „Gold oder Holz“. Anna darf sich eines dieser Kästchen auswählen und möchte natürlich das mit dem Gold bekommen. Sie erfährt, dass alle Aufschriften der Wahrheit entsprechen. Anna darf zwar keines der Kästchen anfassen, aber bevor sie eines auswählt, darf sie sich eines öffnen lassen und hineinschauen.

Untersuche, ob es für Anna eine Möglichkeit gibt, mit Sicherheit das Kästchen mit dem Gold zu erhalten.

<u>3. Aufgabe</u>

Mark spielt mit einem Satz Bauklötze.

a) Er hat genau einen Würfel mit der Kantenlänge 7 cm, je fünf Würfel mit den Kantenlängen 4 cm und 3 cm, sechs Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zwölf Würfel mit der Kantenlänge 1 cm.

   Weise nach, dass Mark aus diesen Spielwürfeln keinen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei alle Würfel verwenden will.

b) Nun hat Mark genau einen Würfel mit der Kantenlänge 6 cm, acht Würfel mit der Kantenlänge 4 cm, fünfzehn Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zehn Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zur Verfügung.

   Untersuche, ob Mark aus diesen Spielwürfeln einen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei wieder alle Würfel verwenden will. Begründe deine Antwort auch hier.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Anlässlich des 50. Geburtstages der Mathematik-Olympiade lädt Professor Knobelfix eine gewisse Anzahl guter Schüler zu einem mathematischen Ferienlager ein. In seiner Eröffnungsrede stellt Prof. Knobelfix fest: „Wenn jeder Teilnehmer am Ende der Veranstaltung mit jedem anderen genau eine Fotografie von sich selbst austauschen würde, dann müssten insgesamt genau 2450 Fotos verteilt werden.“

Untersuche, ob aus der Feststellung von Prof. Knobelfix eindeutig bestimmt werden kann, wie viele Schüler am Ferienlager teilnehmen. Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl dieser Schüler an.

2. Aufgabe

Paul hat die rechts stehende Methode für das Quadrieren zweistelliger Zahlen entdeckt.

a) Erkläre diese Methode und berechne auf die gleiche Weise 59^2, 82^2 und 19^2.

b) Erkläre, warum dieses Rechenverfahren funktioniert.

c) Finde und erkläre ein entsprechendes Verfahren für das Quadrieren dreistelliger Zahlen.

$$\begin{array}{c} 67^2 \\ \hline 42 \\ 3649 \\ 42 \\ \hline 4489 \end{array}$$

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:

(1) Auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt ein Punkt D.

(2) Die Größe α des Innenwinkels BAC ist kleiner als $45°$.

(3) Die Größe des Winkels BDC ist gleich dem Dreifachen von α.

(4) Die Größen der Winkel ACB und BDC sind gleich.

a) Ermittle die Größe β des Winkels CBA für den Fall, dass $\alpha = 20°$ gilt.

b) Ermittle für alle möglichen Werte von α die Größe β des Winkels CBA in Abhängigkeit von α.

c) Ermittle alle Werte α, für die ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Anlässlich des 50. Geburtstages der Mathematik-Olympiade lädt Professor Knobelfix eine gewisse Anzahl guter Schüler zu einem mathematischen Ferienlager ein. In seiner Eröffnungsrede stellt Prof. Knobelfix fest: „Wenn jeder Teilnehmer am Ende der Veranstaltung mit jedem anderen genau eine Fotografie von sich selbst austauschen würde, dann müssten insgesamt genau 2450 Fotos verteilt werden.“

Untersuche, ob aus der Feststellung von Prof. Knobelfix eindeutig bestimmt werden kann, wie viele Schüler am Ferienlager teilnehmen. Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl dieser Schüler an.

2. Aufgabe

Jenny schreibt die ersten vier positiven Quadratzahlen auf: 1, 4, 9, 16. In der nächsten Zeile notiert sie jeweils unter dem Zwischenraum zweier benachbarter Quadratzahlen deren Differenz: 3, 5, 7. Darunter schreibt sie die Differenzen dieser Zahlen, also jeweils eine 2.

1		4		9		16
	3		5		7	
		2		2		

a) Bestätige am Beispiel der Zahlen 25 und 36, dass auch bei einer Verlängerung der ersten Zahlenfolge die Differenzen in der dritten Zeile nur noch den Wert 2 annehmen.

b) Führe eine entsprechende fortgesetzte Differenzbildung für die Folge der Kubikzahlen 1^3 bis 5^3 so lange durch, bis erstmals eine Zeile mit unveränderten Werten erscheint. Beweise, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

c) Weite Deine Untersuchungen auf Potenzen mit größeren Exponenten aus. Nutze die dabei erkannten Gesetzmäßigkeiten zur Vorhersage, nach wie vielen Zeilen bei zehnten Potenzen erstmals ein konstanter Wert auftritt und wie groß dieser sein muss.

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Winkel mit dem Scheitel A und mit der Größe α, wobei gilt $0° < \alpha < 180°$. Auf den Schenkeln dieses Winkels wähle man sich je einen von A verschiedenen Punkt B bzw. C aus, so dass ein Dreieck ABC entsteht. In diesem Dreieck schneiden sich die durch B bzw. C verlaufenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC in einem Punkt I.

Weise nach, dass die Größe δ des Winkels $\sphericalangle BIC$ nicht von der gewählten Lage der Punkte B und C abhängt.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Jenny schreibt die ersten vier positiven Quadratzahlen auf: 1, 4, 9, 16. In der nächsten Zeile notiert sie jeweils unter dem Zwischenraum zweier benachbarter Quadratzahlen deren Differenz: 3, 5, 7. Darunter schreibt sie die Differenzen dieser Zahlen, also jeweils eine 2.

1		4		9		16
	3		5		7	
		2		2		

a) Bestätige am Beispiel der Zahlen 25 und 36, dass auch bei einer Verlängerung der ersten Zahlenfolge die Differenzen in der dritten Zeile nur noch den Wert 2 annehmen.

b) Führe eine entsprechende fortgesetzte Differenzbildung für die Folge der Kubikzahlen 1^3 bis 5^3 so lange durch, bis erstmals eine Zeile mit unveränderten Werten erscheint. Beweise, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

c) Weite Deine Untersuchungen auf Potenzen mit größeren Exponenten aus. Nutze die dabei erkannten Gesetzmäßigkeiten zur Vorhersage, nach wie vielen Zeilen bei zehnten Potenzen erstmals ein konstanter Wert auftritt und wie groß dieser sein muss.

2. Aufgabe

Gegeben ist ein Winkel mit dem Scheitel A und mit der Größe α, wobei gilt $0° < \alpha < 180°$. Auf den Schenkeln dieses Winkels wähle man sich je einen von A verschiedenen Punkt B bzw. C aus, so dass ein Dreieck ABC entsteht. In diesem Dreieck schneiden sich die durch B bzw. C verlaufenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC in einem Punkt I.

Weise nach, dass die Größe δ des Winkels $\sphericalangle BIC$ nicht von der gewählten Lage der Punkte B und C abhängt.

3. Aufgabe

Man kann eine achtstellige Zahl bilden, indem man sich eine vierstellige Zahl ausdenkt und diese zweimal hintereinander schreibt.

Finde

a) die größte und

b) die kleinste

von eins verschiedene natürliche Zahl, durch die jede achtstellige Zahl dieser Form teilbar ist.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als erste Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

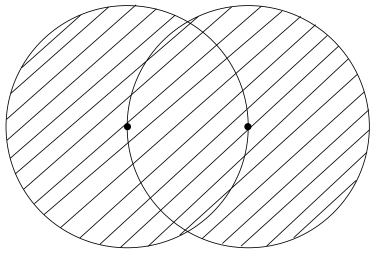
Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Zwei Kreise mit gleichem Radius r schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand des jeweils anderen Kreises liegt, vgl. nebenstehende Abbildung.

Man bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten Fläche.



2. Aufgabe

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1.$$

3. Aufgabe

In einem Kurbad gibt es 100 Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau 5 anderen Kabinen in Betrieb.

Man beweise, dass die Kurverwaltung dann immer 10 Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen 90 Kabinen gesperrt werden.