

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

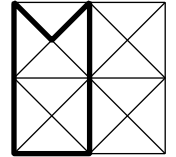
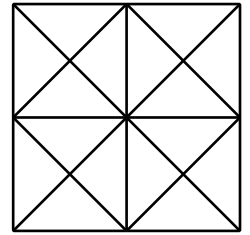
1. Aufgabe

Niklas hat in der 1. Stufe der Mathematik-Olympiade in der rechts gezeigten Figur vorkommende Vierecke gezählt.

Susi findet in der Figur auch Fünfecke. Es gibt viele verschiedene Formen bzw. Größen. Dabei sollen sich die Fünfecke in Form oder Größe unterscheiden, sie sollen also nicht deckungsgleich sein.

Finde mindestens sechs dieser verschiedenen Fünfecke.

Zeichne für jedes deiner gefundenen Fünfecke eine neue Grundfigur und kennzeichne das Fünfeck farbig.



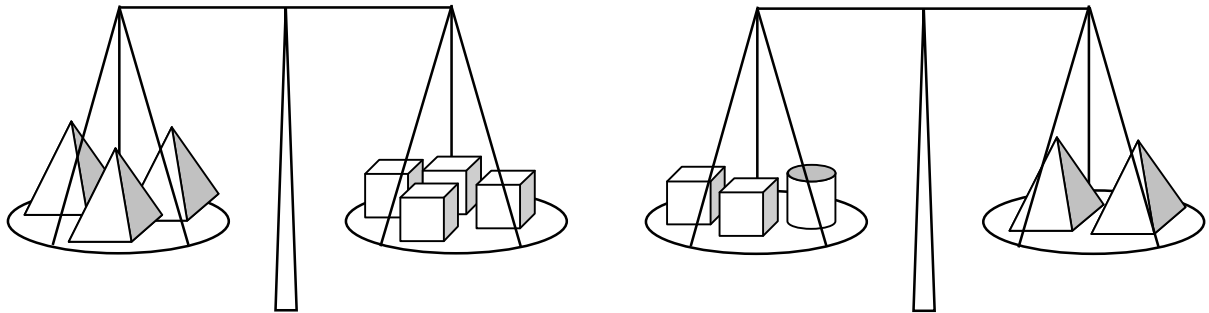
Hinweis: Die Fünfecke können auch „eingedellt“ sein, wie in der kleinen nebenstehenden Abbildung für ein Fünfeck zu sehen ist. (Dieses Fünfeck kannst du natürlich nicht mehr angeben.)

2. Aufgabe

Die Waagen, siehe unten stehende Abbildung, seien jeweils im Gleichgewicht, das heißt:

- (1) Drei Pyramiden sind so schwer wie vier Würfel.
- (2) Zwei Pyramiden sind so schwer wie ein Zylinder und zwei Würfel.

Wie viele Zylinder sind so schwer wie eine Pyramide? Erläutere, wie du zu deiner Lösung gekommen bist.



3. Aufgabe

Die acht Schülerinnen Jule, Karo, Anne, Luisa, Nele, Rafaela, Svenja und Petra wollen nicht mehr an ihren Zweitischen so sitzen wie bisher. Sie stellen folgende Forderungen für ihre neue Sitzordnung auf:

- (1) Petra will neben Luisa oder neben Svenja sitzen.
- (2) Nele will neben Anne oder neben Jule sitzen.
- (3) Karo will neben Jule oder neben Luisa sitzen.
- (4) Rafaela will neben Svenja oder neben Anne sitzen.
- (5) Jule will nicht neben Karo sitzen und auch nicht neben Petra.

Gib eine Sitzordnung an, die alle Wünsche erfüllt. Wer sitzt dann neben wem? Begründe deine Antwort.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Carola und Manuela freuen sich über die wärmende Sonne im Frühling und summen das Lied „Alle Vögel sind schon da“ vor sich hin. In dem großen Kirschbaum sehen sie Amseln, Drosseln, Finken und Stare, die auch die Sonne genießen. Carola meint zu Manuela: „Ich zähle, wie viele Vögel es insgesamt sind, und du zählst, wie viele Vögel von welcher Art auf dem Baum sitzen.“

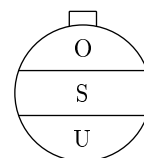
Carola stellt fest, dass es insgesamt 54 Vögel sind. Manuela fasst ihre Beobachtungen zusammen: „Es sind halb so viele Drosseln wie Amseln und dreimal so viele Finken wie Drosseln. Und dann bin ich sicher, dass es weniger als 15 Stare waren. Sie flogen so schnell weg, deshalb weiß ich es nicht genauer.“

Manuela überlegt eine Weile und sagt dann: „Das ist aber schade, denn nun können wir nicht genau ermitteln, wie viele Amseln, Drosseln, Finken und Stare in dem Baum saßen.“

Ermittle alle Anzahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen, und mache jeweils eine Probe.

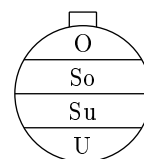
2. Aufgabe

Die Firma *Goldi* produziert Dekorationsmaterial für Weihnachtsbäume, darunter auch Kugeln, die in der Mitte einen Streifen haben, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist. „O“ ist dabei der obere Bereich, „U“ der untere und „S“ der Streifen. Für diese Weihnachtsbaumkugeln mit einem Streifen stehen nur die Farben Blau, Gold und Silber zur Verfügung. Natürlich soll sich der Streifen vom oberen Bereich und vom unteren Bereich abheben.



- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln so zu färben?

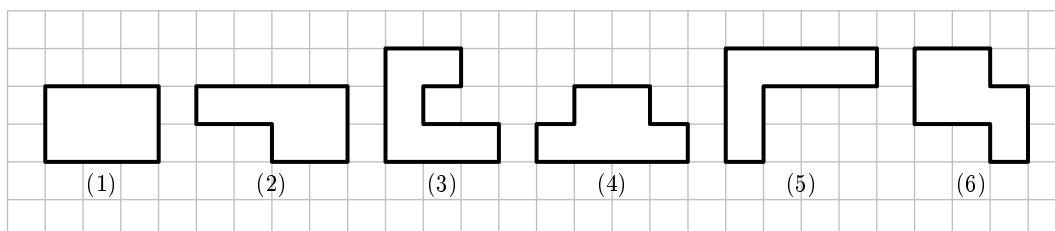
Die Firma *Goldi* produziert auch Kugeln, die in der Mitte zwei aneinanderliegende Streifen „So“ und „Su“ haben, wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen ist. Man möchte wieder die drei Farben Blau, Gold und Silber verwenden, und je zwei aneinanderstoßende Gebiete sollen sich in der Farbe unterscheiden.



- b) Der Lehrling sagt, es gäbe jetzt doppelt so viele Möglichkeiten wie bei den Kugeln mit einem Streifen (siehe a)). Entscheide, ob der Lehrling mit seiner Behauptung recht hat.
- c) Nun wird der Lehrling ganz mutig und sagt: „Wenn wir noch Rot als vierte Farbe verwenden, dann erhalten wir ganz klar viermal so viel verschiedene Kugeln wie mit drei Farben (siehe b))!“ Entscheide wieder, ob der Lehrling damit recht hat.

3. Aufgabe

In einem Puzzle gibt es sechs verschiedene, rechtwinklige, flächengleiche Formen, die jeweils 6 Kästchen groß sind. Von jeder Form sind ausreichend Teile vorhanden, die auch gedreht und umgeklappt verwendet werden dürfen.



- a) Lege aus Teilen zweier verschiedener Formen ein Rechteck, das 12 Kästchen groß ist.
Lege aus Teilen mindestens zweier verschiedener Formen ein Rechteck, das 18 Kästchen groß ist; gib hierfür zwei unterschiedliche Möglichkeiten an.
- b) Ein Quadrat soll mit mehreren Teilen mit der gleichen Form ausgelegt werden. Von unseren sechs Formen ist das für genau vier Formen möglich. Finde sie und gib jeweils das kleinste zugehörige Quadrat mit der Auslegung an.
- c) Lege aus sechs Puzzle-Teilen ein Quadrat; dabei müssen vier der Formen vorkommen. Auf jeden Fall musst du die sechste Form verwenden.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Der folgenden Aufgabe liegt eine Problemstellung zugrunde, die Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (1180–1250), in seinem Buch „Liber Abaci“ im Jahre 1202 veröffentlicht hatte.

Zwei Kaufleute, Pekunia und Moneta, reisen geschäftlich von Pisa nach Lucca, von da nach Florenz und dann zurück nach Pisa. In Lucca und in Florenz verdienen beide so viel, dass sich ihr Geld jeweils jedes Mal verdoppelt. Nach der Verdoppelung des Geldes geben beide in jeder dieser beiden Städte jeweils auch 12 Denare aus.

- a) Als Pekunia heimgekehrt war, hatte er kein Geld mehr.
Berechne, wie viele Denare Pekunia nach Lucca mitgenommen hatte.
- b) Moneta kehrte mit doppelt so viel Geld zurück, wie er am Anfang der Reise hatte.
Berechne, wie viele Denare Moneta mitgenommen hatte.

Mache jeweils eine Probe.

2. Aufgabe

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, dass sie schwarz oder weiß sind und dass mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Die Kiste ist abgedeckt, so dass man die Farben, auch beim Hineingreifen, nicht sehen kann. Durch Tasten lassen sich verschiedenfarbige Kugeln in der Kiste nicht voneinander unterscheiden.

- a) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens 7 grüne Kugeln sind.
- b) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens eine Kugel schwarz ist.
- c) Untersuche, wie viele Kugeln man mindestens herausnehmen muss, um sicher zu sein, dass unter ihnen mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe sind.

3. Aufgabe

Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D und E wird vorausgesetzt:

- (1) Der Innenwinkel ACB ist ein rechter Winkel.
 - (2) Die Größe des Winkels BAC beträgt 60° .
 - (3) Die Winkelhalbierende des Innenwinkels BAC schneidet die Gerade BC im Punkt D .
 - (4) Die Winkelhalbierende des Winkels ADB schneidet die Gerade AB im Punkt E .
 - (5) Die Strecke $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie die Strecke $\overline{AC}$.
- a) Beweise, dass das Dreieck ABD gleichschenkelig ist.
 - b) Beweise, dass das Dreieck AEC gleichseitig ist.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Bei einer 10 km langen Rennstrecke stimmen Startpunkt und Endpunkt überein. Bei einem Rennen werden zwei Runden von insgesamt 20 km auf dieser Strecke gefahren.

- a) Ein Rennfahrer fährt die erste Runde „gemütlich“ mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h. In der zweiten Runde möchte er so schnell fahren, dass er in beiden Runden insgesamt eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h erreicht.

Untersuche, ob dies möglich ist.

- b) Angenommen, er fährt in der ersten Runde 150 km/h.

Ermittle, wie schnell er in der zweiten Runde fahren müsste, um eine durchschnittliche Gesamtgeschwindigkeit von 200 km/h zu erreichen.

2. Aufgabe

Gegeben ist ein Dreieck ABC , in dem die Größen der Innenwinkel BAC , CBA , ACB wie üblich mit α , β , γ bezeichnet sind.

Das Dreieck ABC und zwei Punkte D und E haben die folgenden Eigenschaften:

- (1) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt A hinaus liegt der Punkt D so, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind.
(2) Auf der Verlängerung der Seite $\overline{AB}$ über den Punkt B hinaus liegt der Punkt E so, dass die Strecken $\overline{BE}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.

- a) Berechne die Größe φ des Winkels DCE , falls $\alpha = 30^\circ$ gilt und dabei β doppelt so groß wie α ist.
b) Beweise, dass unter den Voraussetzungen (1) und (2) für die Größe φ des Winkels DCE stets $\varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ gilt.
c) Bestimme, unter welchen Bedingungen an die Innenwinkel des Dreiecks ABC das Dreieck DEC gleichschenkelig ist.

3. Aufgabe

Einen Bruch, dessen Zähler 1 ist und dessen Nenner eine positive ganze Zahl ist, bezeichnet man als Stammbruch. Wenn es gelingt, einen Bruch als Summe von Stammbrüchen darzustellen, nennen wir diese Summendarstellung auch Zerlegung in Stammbrüche.

Beispiele:

$$\frac{3}{22} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22}, \quad \frac{31}{30} = \frac{1}{1} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \quad \frac{303}{700} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25}.$$

- a) Stelle $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche dar.
b) Ermittle alle bis auf Reihenfolge der Summanden verschiedenen Möglichkeiten, $\frac{3}{20}$ als Summe zweier Stammbrüche darzustellen.
c) Stelle $\frac{5}{17}$ als Summe von paarweise verschiedenen Stammbrüchen dar.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 15 sollen so in einer Reihe aufgeschrieben werden, dass jede der fünfzehn Zahlen genau einmal vorkommt und die Summe je zweier benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ist.

Bestimme alle Möglichkeiten.

2. Aufgabe

- a) Der Bruch $\frac{62}{63}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die sowohl verschiedene Zähler als auch verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 63 sein.

Bestimme drei verschiedene solche Darstellungen. Dabei zählen zwei Darstellungen auch als gleich, wenn sie sich allein in der Reihenfolge der Summanden unterscheiden.

- b) Der Bruch $\frac{20}{21}$ soll als Summe zweier vollständig gekürzter Brüche dargestellt werden, die gleiche Zähler, aber verschiedene Nenner haben. Dabei sollen beide Nenner kleiner als 21 sein.

Bestimme alle solchen Darstellungen. Auch hier soll die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielen.

3. Aufgabe

Im Inneren eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u .

Zeige, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}u < x + y + z < u$$

gilt.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Untersuchen Sie, für welche reellen Zahlen a die Gleichung $(x^2 - a)(x^2 + 2ax - a) = 0$ keine, genau eine, genau zwei, genau drei bzw. mehr als drei reelle Lösungen besitzt.

2. Aufgabe

Im Inneren eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u .

Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette

$$\frac{1}{2}u < x + y + z < u$$

gilt.

3. Aufgabe

Wir betrachten in dieser Aufgabe Rechtecke R_1 und R_2 , welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Seitenlängen der Rechtecke sind positive ganze Zahlen.
- (2) Der Flächeninhalt des Rechtecks R_2 ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Rechtecks R_1 .
- (3) Die beiden Rechtecke haben den gleichen Umfang u .

Nun die zwei Teile der Aufgabe:

- a) Bestimmen Sie alle möglichen Seitenlängen solcher Rechtecke R_1 und R_2 , deren Umfang $u = 34$ beträgt.
- b) Seien R_1 und R_2 zwei Rechtecke, die obige drei Bedingungen erfüllen und für die $u > 34$ gilt.
Zeigen Sie, dass die Länge der Diagonalen des Rechtecks R_2 ebenfalls ganzzahlig ist.

26. Essener Mathematikwettbewerb 2010/2011

als zweite Runde der 50. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

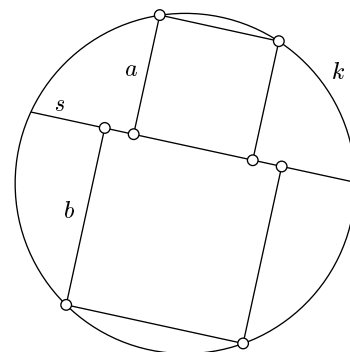
Gegeben sind neun positive ganze Zahlen, die in einer solchen Reihenfolge angeordnet sind, dass die Summe von jeweils drei aufeinander folgenden Zahlen gleich ist. Die erste Zahl in der Reihenfolge ist 450, die letzte 50. Die Summe aller Zahlen beträgt 2010.

Man bestimme alle neun Zahlen.

2. Aufgabe

Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b sind so angeordnet, dass sich jeweils zwei benachbarte Eckpunkte auf einem Kreis k befinden und die beiden anderen auf einer Sehne s von k liegen (siehe Abbildung).

- Man bestimme den Abstand des Mittelpunkts M des Kreises k von der Sehne s in Abhängigkeit von a und b .
- Man begründe, dass $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq 5$ sein muss.



3. Aufgabe

In Abhängigkeit von der reellen Zahl a ermittle man alle reellen Zahlen x , die die Ungleichung

$$\sqrt{2x^2 + 3} < x - a$$

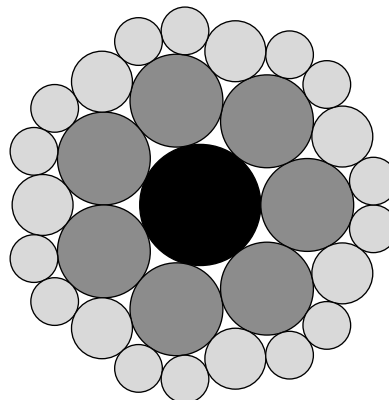
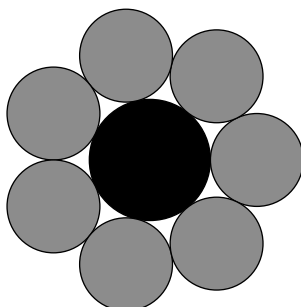
erfüllen.

4. Aufgabe

An eine anfangs kreisförmige Schneeflocke lagert sich in jeder Minute eine neue Schicht an. Jede derartige Schicht besteht aus einer Kette von Kreisen, die sich von außen um die Schneeflocke herumlegt. Dabei sollen nach n Minuten, also nach Anlagerung der n -ten Schicht, jeweils folgende Bedingungen gelten:

- Jeder Kreis der neuen n -ten Schicht berührt genau einen oder genau zwei Kreise der vorangehenden $(n-1)$ -ten Schicht. (Hierbei gilt die anfängliche kreisförmige Flocke als 0-te Schicht.)
- Jeder Kreis der n -ten Schicht berührt genau zwei Kreise der n -ten Schicht.
- Für $n \geq 2$ werden je zwei benachbarte Kreise der vorangehenden $(n-1)$ -ten Schicht gemeinsam von genau einem Kreis der neuen n -ten Schicht berührt.
- Jeder Kreis, der nicht der n -ten Schicht angehört, wird von genau sieben Kreisen berührt.

Die Abbildung zeigt eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten Schicht und eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten und der zweiten Schicht.



Nach der Anlagerung von n Schichten bezeichne x_n die Anzahl aller Kreise mit genau 3 und y_n die Anzahl aller Kreise mit genau 4 Nachbarn. Man bestimme alle Zahlen n , für die das Verhältnis $\frac{x_n}{y_n}$ den Wert $\frac{5}{3}$ hat.

Bemerkung: Es darf vorausgesetzt werden, dass die Anlagerung jeder neuen Schicht möglich ist.