

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

- a) Zeichne fünf Geraden, die genau vier Schnittpunkte haben.
- b) Zeichne fünf Geraden, die genau fünf Schnittpunkte haben.
- c) Wie viele Schnittpunkte können fünf verschiedene Geraden höchstens haben?
Zeichne fünf Geraden mit dieser Höchstzahl von Schnittpunkten.

Hinweis: Zwei parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt; zwei nicht parallele Geraden schneiden sich immer in genau einem Punkt.

2. Aufgabe

Sarah hat auf der Reise in den Urlaub Langeweile und schreibt alle Zahlen von 1 bis 150 auf: 1, 2, 3, 4, ..., 147, 148, 149, 150.

- a) Wie viele einstellige, wie viele zweistellige und wie viele dreistellige Zahlen hat Sarah geschrieben? Wie viele Ziffern hat Sarah insgesamt geschrieben?
- b) Wie viele Ziffern „3“ hat Sarah dabei insgesamt geschrieben? Und wie oft hat sie die Ziffer „5“ geschrieben?
- c) Ihrem Bruder Tino fällt ein neues Rätsel dazu ein. Er radiert nun, von hinten beginnend, die Zahlen 150, 149 usw. weg, bis Sarah, ohne auf das Blatt zu sehen, Halt ruft. Nun zählt Tino, wie oft die Ziffer „3“ noch da steht, und sagt die Anzahl: Es sind noch 25.
Welche Zahlen hat Tino wegradiert?
- d) Tino und Sarah überlegen weiter. „Stell’ dir vor“, sagt Tino, „du hättest alle Zahlen von 300 bis 450 aufgeschrieben, ich hätte dann wieder von hinten anfangend die Zahlen wegradiert, du hättest Halt gesagt, und ich sagte dir dann, es sind noch 40 Ziffern „3“ übrig. Welche Zahlen hätte ich dann wegradiert?“
Sarah überlegt einen Moment und sagt dann: „Dann hättest du einen Fehler gemacht!“
Wieso hat Sarah mit dieser Aussage Recht?

3. Aufgabe

Lea, Katja und Sophie nehmen an einem Ratespiel im Radio teil. Sie sollen Hinweise zu ihrem Aussehen geben; dabei macht jedes der drei Mädchen drei Aussagen, und zwar folgende:

- | | |
|---------|--|
| Lea: | (1a) Katja hat schwarze Haare.
(1b) Sophie hat grüne Augen.
(1c) Ich habe kurze Haare. |
| Katja: | (2a) Lea hat schwarze Haare.
(2b) Lea hat braune Augen.
(2c) Ich habe lange Haare. |
| Sophie: | (3a) Katja ist blond.
(3b) Lea hat grüne Augen.
(3c) Katjas Haare sind kurz. |

Der Moderator der Radiosendung schüttelt den Kopf und sagt: „Eure Haare sind zwar schwarz, rot und blond, eure Augen sind grün, blau und braun und die Haare sind lang, kurz und mittellang, aber ihr habt **alle drei** bei **allen** Beschreibungen gelogen.“

Wie sehen die drei Mädchen aus? Ermittle jeweils die Augenfarbe, die Haarfarbe und die Haarlänge jedes der drei Mädchen.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Ein Rechteck ist 6 cm lang und 4 cm breit. Mit einem Lineal werden vier verschiedene gerade Linien gezogen, die jeweils von einer der vier Kanten zu einer anderen Kante verlaufen müssen. Längs dieser Linien wird das Rechteck zerschnitten.

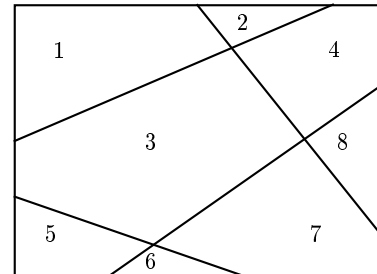
In der Zeichnung ist ein Beispiel dargestellt.

Hier würden 8 Papierschnipsel entstehen.

Wie viele Papierschnipsel können dabei entstehen, wenn die Linien anders verlaufen?

Gib alle verschiedenen Möglichkeiten der Anzahlen an, indem du jeweils ein Beispiel aufzeichnest und die Schnipsel nummerierst!

Hinweis: Zwei Möglichkeiten sollen nur dann verschieden sein, wenn sie sich in der Anzahl der Schnipsel unterscheiden. Die Form der Schnipsel spielt keine Rolle.



2. Aufgabe

- a) Sabine betrachtet einen Spielwürfel mit den Zahlen von 1 bis 6 genauer und will sich für ihre Mitschüler in der Arbeitsgemeinschaft eine Aufgabe ausdenken. Sie weiß, dass die auf gegenüberliegenden Seitenflächen stehenden Zahlen zusammen stets die Summe 7 haben.

Sie will die „Eckproduktsumme“ suchen lassen, die wie folgt gebildet werden soll: Sabine berechnet zunächst für jede Ecke das „Eckprodukt“, indem sie die auf den Seitenflächen stehenden Zahlen der Seitenflächen multipliziert, die an dieser Ecke zusammentreffen. Alle „Eckprodukte“ werden nun addiert und bilden die „Eckproduktsumme“.

Welche „Eckproduktsumme“ hat der Spielwürfel?

- b) Auf den Seitenflächen sollen nun nicht die Zahlen von 1 bis 6 stehen, sondern alle einstelligen Zahlen sollen möglich sein, auch mehrfach. Welche Zahlen müssen auf den Seitenflächen des Würfels stehen, wenn man die größte „Eckproduktsumme“ erhalten will, und wie groß ist diese „Eckproduktsumme“?
- c) Jetzt sollen auf den Seitenflächen wiederum die Zahlen von 1 bis 9 stehen können, aber jede Zahl darf nur einmal vorkommen. Finde eine Belegung der Seitenflächen, so dass eine „Eckproduktsumme“ entsteht, die größer als 2011 ist.

3. Aufgabe

Die Sport-AG der Schule soll ein Tischtennis-Turnier organisieren. Die Sportler überlegen, wie sie den Sieger ermitteln wollen. Es haben sich 24 Kinder angemeldet. Es gibt mehrere Vorschläge:

- a) Anton schlägt vor, dass jeder gegen jeden genau einmal spielen soll.
Wie viele Spiele müssen dann gespielt werden?
- b) Bea schlägt das KO-System vor. Es kommt immer nur der Gewinner weiter. Wenn erstmals eine ungerade Anzahl von Spielern übrig geblieben ist, beginnt die letzte Runde, in der dann jeder gegen jeden spielt.
Wie viele Spiele finden bei diesem Vorschlag statt?
- c) Clemens möchte vier Staffeln A, B, C und D zu je 6 Spielern bilden. In jeder Staffel spielt jeder gegen jeden genau einmal. Die besten 2 jeder Staffel kommen in die zweite Runde. Nun werden zwei Staffeln zu je vier Spielern gebildet. Innerhalb einer Staffel spielt wieder jeder gegen jeden, und die besten 2 kommen in die dritte Runde. In der dritten Runde spielt auch jeder gegen jeden, und der Sieger wird ermittelt.
Wie viele Spiele finden bei dieser Variante statt?

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Erik hatte vor sich ein randvolles Glas Bananensaft und eine Flasche Kirschsafte. Zuerst trank er vorsichtig ein Sechstel des Bananensaftes und füllte das Glas mit der gleichen Menge Kirschsafte auf. Anschließend trank er davon ein Drittel und füllte das Glas wieder bis zum Rand mit Kirschsafte auf. Nun trank er die Hälfte und füllte nochmals das Glas mit Kirschsafte bis zum Rand auf. Dann trank er das Glas leer.

Untersuche, ob Erik mehr, gleichviel oder weniger Bananen- als Kirschsafte getrunken hat.

2. Aufgabe

Eine Reisegruppe von 40 Touristen kam in Australien an. Dreißig von ihnen hatten Amerikanische Dollar und zwanzig von ihnen hatten Britische Pfund.

- a) Ermittle die kleinstmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.
- b) Ermittle die größtmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.

3. Aufgabe

Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen. Eine der Seiten dieses Dreiecks soll 2,5-mal so lang sein wie eine der anderen Seiten.

Untersuche, ob es möglich ist, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Ist dies der Fall, dann gib alle Möglichkeiten an.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Als Eulenspiegel wieder einmal auf Wanderschaft war, traf er unterwegs einen Handwerksburschen. Sie hatten Hunger und gingen gemeinsam bis zum nächsten Wirtshaus. Dort verspeisten sie ein köstliches Mahl, für das jeder von ihnen einen Taler hätte bezahlen müssen. Auf Wunsch des Wirtes begannen sie aber zunächst mit einem Kartenspiel.

Zuerst verlor Eulenspiegel die Hälfte seines Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an den Wirt. Danach verlor der Handwerksbursche die Hälfte seines nun vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Wirt. Schließlich verlor der Wirt die Hälfte seines dann vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an Eulenspiegel. Nach Abschluss dieses dritten Spieles hatte jeder der drei Spieler genau 8 Taler.

Ermittle, wie viel jeder der Spieler bei diesem Kartenspiel insgesamt gewonnen oder verloren hat.

2. Aufgabe

Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, bezeichnet man als *Sehne* dieses Kreises. Ein Viereck $ABCD$, dessen Eckpunkte in der Reihenfolge A, B, C, D auf einem Kreis liegen, heißt *Sehnenviereck*.

- Die Punkte A, B, C und D mit den Koordinaten $(6; 0)$, $(10; 2)$, $(10; 8)$ und $(3; 1)$ sind Eckpunkte eines Sehnenvierecks.
Trage diese Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und konstruiere einen Kreis, auf dem alle vier Punkte liegen.
Beschreibe, wie du den Kreismittelpunkt konstruiert hast, und gib seine Koordinaten an.
- Zeichne drei verschieden große Kreise und in jeden dieser Kreise ein Sehnenviereck. Miss die Größen aller Innenwinkel der Vierecke und bilde jeweils von zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln die Summe ihrer Größen.
Welche Vermutung kann man aus diesen Beispielen ableiten?
- Beweise deine Vermutung für den Fall, dass der Mittelpunkt des Umkreises im Inneren des Sehnenvierecks liegt.

3. Aufgabe

Eine Palindromzahl ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man ihre Ziffern von links nach rechts, so ergibt sich dieselbe Zahl, wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl 615 516 ist eine Palindromzahl. Die Zahl 415 ist keine Palindromzahl, denn wenn man die Ziffern von rechts nach links liest, erhält man die Zahl 514.

- Beweise: Eine sechsstellige Palindromzahl ist immer durch 11 teilbar.
- Beweise: Wenn man alle sechsstelligen Palindromzahlen durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10% dieser Quotienten fünfstellige Palindromzahlen.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: „Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen! Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau 26 €.“ Herr Geizig antwortet: „Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein! Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründe, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

2. Aufgabe

Es sollen Sitzanordnungen für sieben Paare (jeweils ein Mann und eine Frau) untersucht werden. Eines dieser Paare ist das Hochzeitspaar, die anderen sind bei der Hochzeitsfeier zu Gast. Es stehen zwei runde Tische zur Verfügung: ein Tisch für vier Paare und einer für drei Paare. Das Hochzeitspaar soll am großen Tisch sitzen. Die Paare setzen sich stets so an den Tisch, dass jede Frau rechts neben ihrem Mann sitzt.

- a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es?

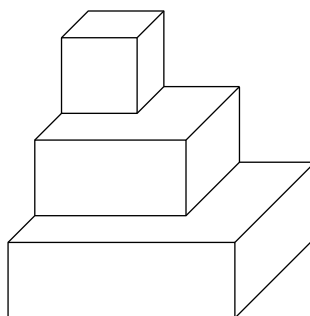
Hinweis: Zwei Sitzordnungen an einem Tisch sollen gleich sein, wenn man die eine aus der anderen dadurch erreichen kann, dass alle am Tisch Sitzenden um einen Stuhl oder um die jeweils gleiche Anzahl von Stühlen in die gleiche Richtung rutschen (den Platz der vorher dort Sitzenden einnehmen).

- b) Zu später Stunde werden alle Regeln bezüglich der Sitzordnung fallen gelassen; jeder setzt sich da hin, wo er möchte. Wie viele Sitzordnungen sind jetzt denkbar?

3. Aufgabe

Aus Einheitswürfeln der Kantenlänge 1 cm wird ein stufenförmiger Körper wie folgt zusammengesetzt: In der obersten Schicht befindet sich genau ein Würfel. Er steht auf einer Schicht aus $2 \cdot 2$ Würfeln, diese wiederum auf einer Schicht aus $3 \cdot 3$ Würfeln usw.

Wenn ein solcher Körper n Schichten besitzt, dann besteht die unterste Schicht also aus $n \cdot n$ Würfeln. Die Schichten des Körpers sind so angeordnet, wie es die Abbildung für $n = 3$ zeigt.



- a) Aus Einheitswürfeln wurde ein solcher Körper mit 6 Schichten zusammengeleimt. Danach bearbeitete man diejenigen Kanten des Körpers mit einer Schleifmaschine, die die Stufen vorn und rechts bilden. Auf diese Weise entstand durch das schräge Abschleifen der Stufen eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche und einem Volumen $V = 72 \text{ cm}^3$. (Die Existenz einer solchen Pyramide kann hier vorausgesetzt werden; eine Begründung wird nicht verlangt.)

Berechne den Anteil des Ausgangsvolumens, der bei der Bearbeitung abgeschliffen wurde.

- b) Untersuche, ob bei einem stufenförmigen Körper mit $n = 2011$ Schichten die Anzahl der verwendeten Einheitswürfel durch 9 teilbar ist. Sollte dies nicht der Fall sein, dann ermitteln Sie die erste Zahl n nach 2011, für die diese Anzahl durch 9 teilbar ist.
- c) Begründe, dass für jede positive Schichtenanzahl n der stufenförmige Körper aus mehr als $\frac{1}{3} \cdot n^3$, aber aus weniger als $\frac{1}{3} \cdot (n + 1)^3$ Einheitswürfeln besteht.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: „Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen! Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau 26 €.“ Herr Geizig antwortet: „Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein! Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründen Sie, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

2. Aufgabe

Die Seiten zweier unterschiedlich dicker Bücher werden fortlaufend durchnummeriert – jeweils beginnend mit der Seite 1 auf der Vorderseite des ersten Blattes.

- a) Zum Nummerieren der Seiten des ersten Buches benötigt man 6941 Ziffern.

Ermitteln Sie die Nummer der letzten Seite.

- b) Wir betrachten im Folgenden die Seitennummern und nicht mehr die Anzahl der verwendeten Ziffern. Aus dem zweiten Buch hat jemand ein Blatt herausgerissen, dadurch fehlen die beiden Nummern auf Vorder- und Rückseite dieses Blattes. Die Summe aller noch verbliebenen Seitennummern im zweiten Buch beträgt 81 707.

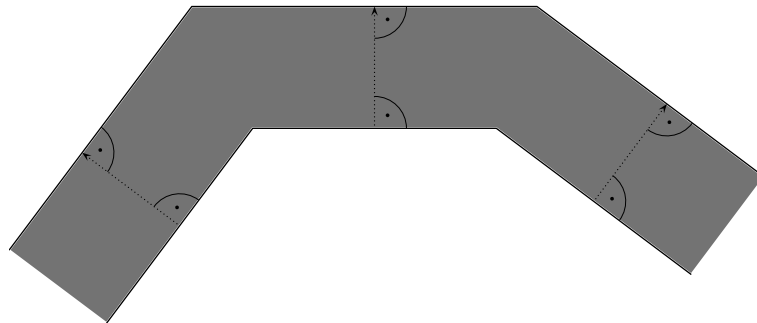
Ermitteln Sie die beiden fehlenden Seitennummern.

3. Aufgabe

Alle Seiten eines konvexen n -Ecks vom Umfang 12 cm werden um 1 cm nach außen „verschoben“ wie in der Skizze für einen Teil eines solchen n -Ecks dargestellt.

Beweisen Sie, dass sich dabei der Flächeninhalt des n -Ecks um mehr als 15 cm^2 vergrößert.

Hinweis: Ein n -Eck heißt konvex, wenn nichtbenachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als 180° sind.



27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als erste Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Man ermittle alle Paare $(n; p)$ mit einer positiven ganzen Zahl n und einer Primzahl p , die die Gleichung

$$n^2 - 8n + 6 = p - 1$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Gegeben sei ein Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$. Auf der Strecke $\overline{AC}$ liege der Punkt B . Die Senkrechte zu $\overline{AC}$ durch B schneide den Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$ im Punkt D . Über den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ seien Halbkreise gezeichnet wie in der Abbildung gezeigt.

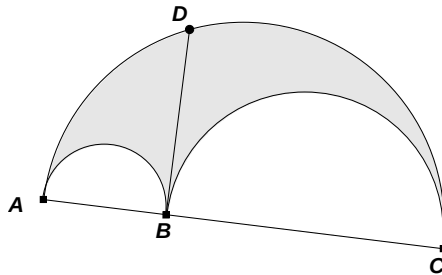


Abbildung A511312

Man beweise, dass der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{BD}$ und die grau markierte Fläche denselben Flächeninhalt haben.

3. Aufgabe

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produktes $p = a \cdot b \cdot c \cdot d$, wenn die ganzen Zahlen a, b, c, d den folgenden Bedingungen (1)–(4) genügen:

- (1) $a > 10$,
- (2) $6a = b + c$,
- (3) $8a = c + d - 2$,
- (4) $10a = b + c + d - 3$.