

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

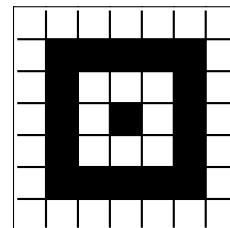
als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Zeichne auf Kästchenpapier ein Quadrat mit 13 Kästchen Kantenlänge. Färbe dann das zentrale Kästchen (also das Kästchen genau in der Mitte) schwarz. Um dieses zentrale Kästchen lässt du einen Ring aus weißen Kästchen. Dieser Ring wird jetzt wieder von einem Ring aus schwarzen Kästchen umgeben - und so weiter, bis du am Rand des Quadrats angekommen bist. Die Abbildung zeigt ein entsprechend gefärbtes Quadrat mit 7 Kästchen Kantenlänge.



- Wie viele Ringe aus weißen Kästchen gibt es in dem 13×13 - Quadrat?
- Wie viele Kästchen in dem 13×13 - Quadrat sind weiß gefärbt, wie viele schwarz?
- Wie viele weiße und wie viele schwarze Kästchen gibt es in einem 19×19 - Quadrat? (Löse diese Aufgabe bitte nicht durch eine Zeichnung, sondern durch Denken, und schreibe die Begründung auf!)

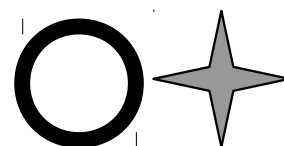
2. Aufgabe

Ein Olivenbauer sagt: „Auf meinem Gut stehen 200 Olivenbäume. Jeder meiner Olivenbäume trägt im Jahr 36 kg Oliven. Jede Olive wiegt 5 g. Natürlich hat jede Olive einen Stein, und der wiegt 2 g. Um einen Liter Olivenöl zu pressen, brauche ich neunhundert Oliven.“

- Wie viel wiegen die Oliven, aus denen zwei Liter Olivenöl gepresst wird?
- Wie viele Liter Olivenöl kann der Bauer pro Jahr aus der Olivenernte herstellen?
- Wie viel wiegen alle Steine zusammen, die bei der Pressung übrig bleiben?
- Ein Liter Öl wiegt 1 kg. Der Rest von der Pressung - also das, was weder Stein noch Öl ist - kann als Tierfutter verwendet werden. Wie viel Tierfutter kann der Bauer verkaufen?

3. Aufgabe

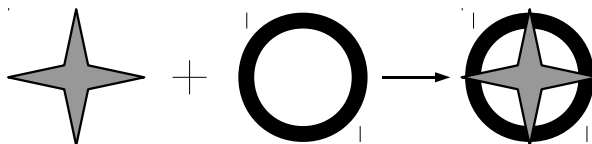
Sarah hat zwei Stempeltypen bekommen, einen Stempeltyp, der einen Kreis ergibt, und einen Stempeltyp, der einen Stern ergibt. Sie überlegt sich, ob sie mit diesen beiden Stempeltypen und vier Stempelkissen mit den Farben Rot, Grün, Orange und Blau jede Seite ihres Tagebuchs unterschiedlich „nummerieren“ kann; das Tagebuch hat einhundert Seiten.



- Ihre erste Idee ist, einfach zwei Stempel unten auf jede Seite so zu setzen, dass sich jede Seite von jeder anderen unterscheidet - sei es durch mindestens eine Farbe der Stempel, sei es durch den Typ der Stempel, sei es durch die Reihenfolge. (Roter Kreis, dann blauer Stern ist also eine andere „Seitennummer“ als blauer Stern, dann roter Kreis).

Wie viele Seiten kann sie auf diese Art nummerieren? Reicht dies für das Tagebuch?

- Sarahs Freundin Katrin schlägt eine andere „Nummerierungs-Stempelung“ vor:
„Pass’ mal auf, auf jede Seite machst du unten zwei Doppel-Stempel, also jeweils einen Stern im Kreis.“



Und damit es hübscher aussieht, soll jeder Kreis eine andere Farbe haben, und jeder Stern soll sich in der Farbe von seinem Kreis unterscheiden.“

Wie viele Seiten können mit Katrins Vorschlag „nummeriert“ werden?

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Anton zerschneidet ein A4-Blatt in vier Teile. Das soll die erste Zerlegung sein. Er nimmt dann eines der Stücke und zerschneidet es wieder in vier Teile. Das liefert die Zerlegung Nummer 2.

- a) Das macht er sechsmal so. Wie viele Schnipsel hat Anton nach der Zerlegung Nummer 6? Bezeichne diese Anzahl mit $A(6)$.
- b) Gib eine Formel an, wie man die Anzahl $A(n)$ der Schnipsel nach der n -ten Zerlegung aus der Nummer n ermitteln kann, und begründe sie.
- c) Jetzt ändert Anton seine Schneidearbeit:
In der ersten Zerlegung zerschneidet er ein neues A4-Blatt in fünf Teile.
In der zweiten Zerlegung wählt er zwei Stücke aus und zerschneidet beide in jeweils fünf Teile.
In der dritten Zerlegung wählt er drei Stücke aus und zerschneidet alle drei in jeweils fünf Teile - usw.
Wie viele Schnipsel sind bei dieser Zerschneidungsweise nach der Zerlegung Nummer 7 vorhanden?

2. Aufgabe

Onkel Otto und Tante Lore sind beide begeisterte Wanderer; allerdings läuft Tante Lore viel schneller. Sie wandert mit 6 Kilometern pro Stunde, ohne außer Atem zu kommen. Onkel Otto hingegen schafft nur 4 Kilometer pro Stunde.

Am Sonntag befinden sie sich getrennt voneinander in zwei Dörfern, zwischen denen 12 Kilometer liegen; Onkel Otto ist in Westerloh, Tante Lore in Osterloh.

- a) Onkel Otto schlägt zunächst vor: „Weißt du, genau auf der halben Strecke gibt es ein nettes Lokal. Lass' es uns so machen, dass wir da gleichzeitig eintreffen, dann kannst du noch ein wenig später losgehen als ich.“
Wann müsste Tante Lore losgehen, wenn Onkel Otto um 14 Uhr aufbricht?
- b) Tante Lore sagt: „Gut, machen wir so.“
Onkel Otto denkt sich: „Ich nehme mein Fahrrad, damit fahre ich ganz gemütlich mit 10 Kilometern pro Stunde. Und damit Tante Lore das nicht merkt, stelle ich das Rad einen Kilometer vor dem Lokal ab und laufe den Rest.“
Wann muss er losradeln?
- c) Onkel Otto sitzt auf dem Fahrrad und hat Zeit zum Nachdenken. Er überlegt: „Wenn wir beide zu Fuß um 15 Uhr gestartet wären - wann und wo auf der Strecke zwischen Westerloh und Osterloh würden wir uns treffen?“
Ermittle die Antworten auf die beiden Fragen von Onkel Otto.

3. Aufgabe

Die vier Freundinnen Celina, Martina, Vanessa und Sarah sind sehr tierlieb und betreuen in den Ferien die Haustiere der Nachbarn. Bei den Tieren handelt es sich um ein Hamster, einen Vogel, einen Hund und eine Katze, und sie heißen - in irgendeiner Reihenfolge - Benny, Felix, Max und Mister X.

- (1) Sarah bringt ihrer Freundin Futter für den Hamster mit und erzählt von ihrem Besuch bei Benny.
- (2) Celina, die keine Katzen mag, besucht die Freundin, die den Hamster betreut. Beide tauschen Neuigkeiten aus, und Celina erzählt, dass Mister X in seinem Pflegequartier eine Lampe zerbrochen hat.
- (3) Vanessa hätte gern den Hamster oder Felix betreut, erzählt sie der Freundin, bei der gerade der Hund wohnt. Nun muss sie eine neue Lampe kaufen, weil sie nicht aufgepasst hat.
- (4) Martina ist mit ihrem Tier namens Max sehr zufrieden, umso mehr, als Sarah ihr erzählt, dass sie vor kurzem ihren Vogel einfangen musste.

Welche Freundin betreut welches Haustier, und wie heißen die Tiere?

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Annika liebt Zahlenspielerereien und wohnt in der Eulerstraße 56. Als sie in der Adressenliste ihrer Klasse die Hausnummern ihrer Mitschüler mit der eigenen vergleicht, fallen ihr besondere Zusammenhänge auf:

- (1) Die Summe der Hausnummern ihrer vier liebsten Klassenkameraden Priska, Betty, Sarah und Holger ergibt ihre eigene Hausnummer.
 - (2) Die Hausnummer von Betty ist doppelt so groß wie die Hausnummer von Priska.
 - (3) Sarah hat eine Hausnummer, die doppelt so groß wie Bettys Hausnummer ist.
 - (4) Holger wohnt in einem Haus mit einer Hausnummer, die genau halb so groß wie Bettys Hausnummer ist.
- a) Ermittle die Hausnummern der vier besten Freunde von Annika.
- b) Weise zusätzlich durch eine Probe nach, dass die in Teilaufgabe a) ermittelten Hausnummern tatsächlich die im Aufgabentext gestellten Bedingungen erfüllen, d. h. führe eine *Probe am Text* durch.

2. Aufgabe

Gegeben sind zwei Strecken mit den Streckenlängen $a = 13\text{ cm}$ und $b = 7\text{ cm}$. Aus diesen beiden Strecken sollen unter Hinzunahme einer dritten Strecke Dreiecke gezeichnet werden. Alle Größen werden in Zentimeter angegeben.

- a) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl p der Länge dieser Strecke eine Primzahl ist.
- b) Ermittle alle möglichen Längen der dritten Strecke, wenn außerdem gefordert wird, dass die Maßzahl q der Länge dieser Strecke derart gewählt wird, dass die Maßzahl u des Umfangs des Dreiecks eine Primzahl ist.

3. Aufgabe

- a) Jemand bildet aus zwei positiven ganzen Zahlen die Summe, die Differenz und das Produkt. Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser drei Ergebnisse durch 3 teilbar ist.
- b) Jemand bildet aus drei positiven ganzen Zahlen, für die $a \geq b \geq c$ gilt, die Summe $a + b + c$ und die Differenzen $a - b$, $b - c$, $a - c$.
Untersuche, ob es vorkommen kann, dass keines dieser vier Ergebnisse durch 3 teilbar ist.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Die 6 Schulfreunde Arno, Bodo, Cuno, Doro, Enno und Fero wollen in einem Kaufhaus die Rolltreppe zur nächsten Etage benutzen.

- Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn sie sich nacheinander jeweils auf eine Stufe stellen.
- Ermittle die Anzahl der verbleibenden Möglichkeiten für Bodo, Cuno, Doro und Enno, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno als erster und Fero als letzter mit der Rolltreppe fahren wollen.
- Ermittle die Anzahl aller Möglichkeiten, die Rolltreppe zu betreten, wenn Arno, Bodo und Cuno auf drei unmittelbar aufeinander folgenden Stufen stehen wollen, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge.

2. Aufgabe

Die Zahl 63 ist 7-mal so groß wie ihre Quersumme, da $63 = 7 \cdot (6 + 3)$ gilt.

- Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die 7-mal so groß sind wie ihre Quersumme.
- Ermittle alle dreistelligen Zahlen, die 19-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

3. Aufgabe

Von einem Sehnenviereck $ABCD$ mit dem Umkreismittelpunkt M ist bekannt:

- Die Größe des Innenwinkels BAD beträgt 80° .
- Die Größe des Winkels MAD beträgt 30° .
- Die Größe des Winkels BMC beträgt 70° .

Fertige eine Skizze an und berechne unter diesen Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel CBA , DCB und ADC .

Hinweis: Es darf ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass der Punkt M im Inneren des Vierecks $ABCD$ liegt.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Ermittle alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 - 9 = 25p$ gilt.

2. Aufgabe

Der Wanderer Wendelin beginnt seine Tageswanderung mit dem ersten Sonnenstrahl um 6:00 Uhr und möchte seinen verschlafenen Vetter Valentin besuchen, der 34 km entfernt wohnt. Dieser hat just am gleichen Tag dieselbe Idee und begibt sich um 10:00 Uhr auf gleichem Wege zu Wendelin. Als sich beide um 12:00 Uhr in der Gaststätte „Goldener Treff“ begegnen, ist die Freude groß. Beim Mittagessen stellen sie fest, dass jeder mit gleichbleibender Geschwindigkeit lief.

- a) Zusätzlich ist bekannt, dass die Länge von Valentins Wanderweg 10 km beträgt.
Ermittle die Geschwindigkeiten von Wendelin und Valentin in Kilometer pro Stunde.
Berechne das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten der beiden Wanderer.
- b) Zeige, dass man die Wandergeschwindigkeit von Wendelin und von Valentin auch aus dem arithmetischen Mittel der Wandergeschwindigkeiten von 4,5 km/h eindeutig bestimmen kann, ohne die Länge von Valentins Wanderweg zu kennen.

Hinweis: Das *arithmetische Mittel* (auch Durchschnitt) von Werten ist ein Mittelwert, der als Quotient aus der Summe aller Werte und der Anzahl der Werte definiert ist.

3. Aufgabe

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Punkte X und Y seien die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden AC bzw. BC .

- a) Beweise, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig ist, und dass $|PX| = |PY|$ gilt.
- b) Beweise, dass das Verhältnis der Längen der Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke APC und BPC übereinstimmt.

Hinweis: In beiden Teilaufgaben ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10

1. Aufgabe

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (p, z) aus einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z , für welche die Beziehung $z^2 - 9 = 25p$ gilt.

2. Aufgabe

Für zwei positive rationale Zahlen a und b mit $a > 2$ werden die Terme a^2 , $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ und b^2 gebildet.

Weisen Sie nach, dass die Summe der sechs Terme stets größer als 12 ist.

3. Aufgabe

Es sei ABC ein Dreieck mit $|AC| < |BC|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Parallele zu AC durch B schneide die Gerade CP in R .

- a) Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig und das Dreieck RBC gleichschenkelig ist.
- b) Beweisen Sie, dass $|AP| : |PB| = |AC| : |CB|$ gilt.

Hinweis: In beiden der Teilaufgaben ist die Ausführung eines Beweises verlangt. Das bloße Zitieren eines bekannten Satzes genügt hier nicht.

27. Essener Mathematikwettbewerb 2011/2012

als zweite Runde der 51. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen 11 - 13

1. Aufgabe

Es sei $Q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n . Man beweise, dass

$$Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$$

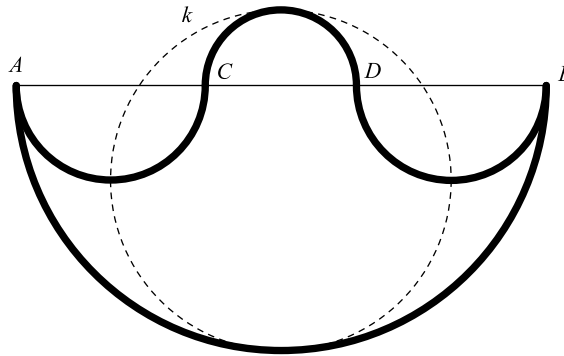
für alle positiven ganzen Zahlen m und n gilt.

2. Aufgabe

Die *Salinon* genannte Figur wird von vier Halbkreisbögen begrenzt (siehe Abbildung A511322). Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ sind gleich lang.

Der Kreis k berührt die Halbkreise über $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ derart, dass die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein Durchmesser von k ist, der auf der Strecke $\overline{AB}$ senkrecht steht.

Man beweise, dass das Salinon und der Kreis k flächengleich sind.



3. Aufgabe

Es sei a eine reelle Zahl. Man ermittle in Abhängigkeit von a alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$x^3 + a^3 = x^2 - xa + a^2$$

erfüllen.

4. Aufgabe

In einem Fechtturnier mit 2^n Teilnehmern kämpft jeder Fechter genau einmal gegen jeden anderen. Kein Kampf endet unentschieden.

Eine Reporterin möchte nacheinander Einzelinterviews mit $n+1$ Fechtern führen. Diese sollen so ausgewählt werden, dass jeder interviewte Fechter gegen alle Fechter, die vor ihm interviewt wurden, gesiegt hat.

- Man zeige, dass die Reporterin für $n=1$ und $n=2$ eine entsprechende Auswahl von Fechtern für die Interviews treffen kann.
- Man zeige, dass dies für alle positiven ganzen Zahlen n möglich ist.