

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

Das Wetter ist wunderbar und viele Leute möchten es für eine Dampferfahrt nutzen.

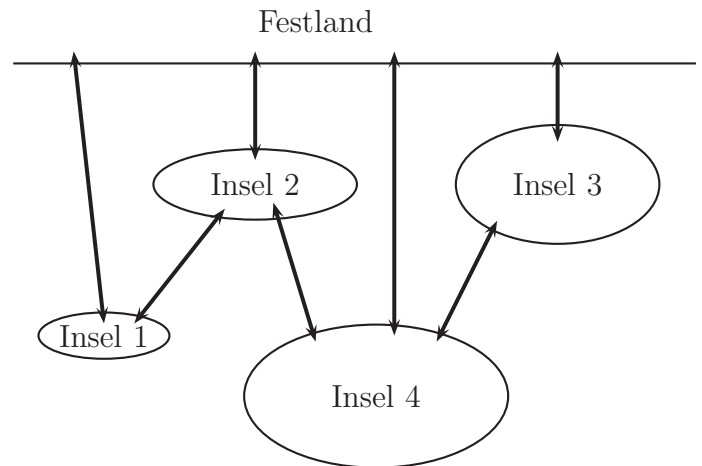
- a) Vor der Anlegestelle für den Dampfer hat sich ein Eisverkaufswagen aufgestellt. Eine Lehrerin kauft für die 23 Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse und für sich je eine Eiswaffel mit zwei Kugeln; die Eiskugeln unterschiedlicher Sorten kosten unterschiedlich viel. Die Lehrerin rechnet zusammen: 15 Kugeln kosten je 80 Cent, 20 Kugeln kosten je 90 Cent und die restlichen Kugeln kosten jeweils einen Euro. Wie viel muss die Lehrerin insgesamt bezahlen?
- b) An der Kasse zur Dampferfahrt ist es ziemlich voll. Eine Gruppe kauft 3 Seniorenkarten und 5 Erwachsenenkarten und bezahlt 58 €. Die nächste Gruppe bezahlt denselben Preis, kauft aber 10 Kinderkarten und 3 Seniorenkarten. Die dritte Gruppe besteht aus 8 Erwachsenen und 6 Kindern; sie bezahlen 88 €. Wie teuer sind die Karten für Senioren, Erwachsene und Kinder für diese Dampferfahrt? Weise nach, dass Deine Ergebnisse die gestellten Bedingungen erfüllen.

2. Aufgabe

Im Blauen See gibt es vier Inseln, die untereinander und mit dem Festland durch Brücken verbunden sind (siehe Abbildung):

Felix wohnt auf dem Festland und will mit seinem Fahrrad so über genau drei verschiedene Brücken fahren, dass er sich danach wieder auf dem Festland befindet.

- a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Felix für eine solche Fahrt?
Gib alle Möglichkeiten an.



Im Grünen See gibt es fünf Inseln. Die Inseln sind unterschiedlich groß und sollen entsprechend ihrer Größe mit 1, 2, 3, 4 und 5 bezeichnet werden, wobei die größte Insel die Nummer 5 trägt. Zwischen den Inseln und von Inseln zum Festland gibt es Brücken. Über die Inseln und Brücken ist folgendes bekannt:

- (1) Die größte Insel ist mit drei anderen Inseln durch je eine Brücke verbunden.
 - (2) Zur kleinsten Insel führt nur eine Brücke.
 - (3) Von jeder der drei mittelgroßen Inseln gehen zwei Brücken aus.
 - (4) Es gibt zwei Brücken zum Festland, und die gehen von der zweit- und von der drittkleinsten Insel aus.
- b) Wie viele Brücken gibt es insgesamt?
- c) Zeichne eine Möglichkeit, wie Inseln und Festland untereinander verbunden sein können.

3. Aufgabe

Frau Müller kommt in ihre neue Arbeitsgemeinschaft Mathematik und stellt fest, dass da drei Mädchen und drei Jungen vor ihr sitzen. Sie bittet darum, dass alle sechs ihren Namen auf ein Schildchen schreiben. Das tun die sechs auch ganz brav, aber als Frau Müller sich umdreht, werfen sie alle ihre Schildchen auf einen Haufen und lächeln Frau Müller erwartungsvoll an: „Wie viele Möglichkeiten gibt es denn jetzt, uns Namen zuzuordnen – die Jungennamen und die Mädchennamen können sie ja unterscheiden?“ fragen die Kinder.

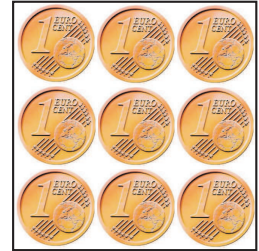
- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Zuordnung der Jungennamen? Wie viele für die Mädchennamen? Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Namenszuordnung insgesamt?
- b) Da steht ein Mädchen auf und sagt: „Ich will es Ihnen einfacher machen. Ich bin Carola.“ Und ein Junge steht auf und sagt: „Noch einfacher für Sie: Ich bin nicht Paul, das ist ein anderer von uns.“ Wie viele Möglichkeiten der Namenszuordnung hat Frau Müller jetzt insgesamt?

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 6

1. Aufgabe

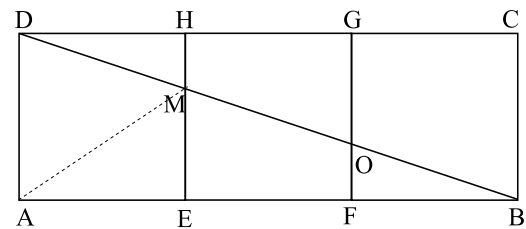
Man kann Ein-Cent-Münzen so legen, dass sie von den Seiten eines Quadrates genau begrenzt werden. Die Abbildung zeigt, wie neun Münzen ein Quadrat bilden.



- Lukas will aus 28 Ein-Cent-Münzen vier Quadrate so legen, dass drei von ihnen gleich groß sind.
Ermittle alle Möglichkeiten für eine solche Zerlegung.
- Lukas hat insgesamt 2012 Ein-Cent-Münzen und will sie in sein Sparschwein stecken. Nach 1900 Münzen ist das Sparschwein restlos voll, nichts geht mehr hinein.
Lukas überlegt: Schaffe ich es, aus den restlichen Münzen vier Quadrate so zu legen, dass drei davon gleich groß sind und das vierte kleiner ist?
Zeige durch eine Rechnung, dass Lukas es schaffen kann.
- Jetzt überlegt Lukas, ob eine solche Anordnung der Münzen auch für die 1900 Centstücke im Sparschwein möglich ist.
Entscheide durch Rechnen, ob dies möglich ist.

2. Aufgabe

Die in der nebenstehenden Abbildung dargestellte Figur zeigt ein Rechteck $ABCD$ aus drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$. Die Kanten der Quadrate sind jeweils 6 cm lang.



Die Strecke \overline{BD} schneidet die Strecke \overline{EH} im Punkt M so, dass die Strecke \overline{EM} doppelt so lang ist wie die Strecke \overline{MH} ; entsprechend ist die Strecke \overline{GO} doppelt so lang wie die Strecke \overline{OF} .

Ermittle

- den Flächeninhalt des Vierecks $EFOM$,
- den Flächeninhalt des Dreiecks FBO ,
- den Flächeninhalt des Dreiecks AMD .

Gib die Flächeninhalte in cm^2 an.

3. Aufgabe

Der neue Trainer Butenschön kommt in seine neue Schach-Arbeitsgemeinschaft und stellt fest, dass da vier Mädchen und drei Jungen vor ihm sitzen, deren Namen er noch nicht kennt. Er bittet, dass alle sieben ihren Namen auf ein Schildchen schreiben. Das tun die sieben auch ganz brav, aber als Herr Butenschön sich umdreht, werfen sie alle ihre Schildchen auf einen Haufen und lächeln den Trainer erwartungsvoll an: „Wie viele Möglichkeiten gibt es denn jetzt, uns Namen zuzuordnen – die Jungennamen und die Mädchennamen können Sie ja unterscheiden?“ fragen die Kinder.

- Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils für die Zuordnung der Mädchennamen und für die Zuordnung der Jungennamen?
Wie viele Zuordnungen gibt es insgesamt für die Zuordnung der Namen zu den Teilnehmern der Schach-Arbeitsgemeinschaft?
- Da steht ein Mädchen auf und sagt: „Ich will es Ihnen einfacher machen. Auf einem der Schildchen steht der Name Carola, und das bin ich nicht.“ Nun steht auch noch ein Junge auf und sagt: „Noch einfacher für Sie: Ich bin nicht Paul, das ist ein anderer von uns.“
Wie viele Möglichkeiten der Namenszuordnung hat Herr Butenschön jetzt noch?

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Auf einem Tisch stehen in dieser Reihenfolge von links nach rechts eine rote, eine grüne, eine blaue, eine weiße und eine schwarze Kanne. In diesen Kannen befinden sich in unbekannter Reihenfolge die fünf verschiedenen Getränke Tee, Kaffee, Milch, Wasser und Saft. Bekannt ist nur, dass sich die Kanne mit Kaffee in der Mitte befindet.

Die schwarze Kanne wird nun so zwischen zwei andere Kannen gestellt, dass unmittelbar links neben ihr die Kanne mit dem Tee und unmittelbar rechts neben ihr die Kanne mit der Milch steht. Nach diesem Umstellen steht die Kanne mit der Milch direkt neben der Kanne mit dem Wasser.

Zeige, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Getränke die genannten Kannen enthalten.

2. Aufgabe

- a) Die Abbildung a zeigt ein Quadrat $ABCD$, dem ein Quadrat $EFGH$ so eingeschrieben ist, dass die Eckpunkte des kleineren Quadrates $EFGH$ auf den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ liegen. Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 cm^2 .

Ermittle den Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$.

- b) Die Abbildung b zeigt ein Quadrat $PQRS$, dem ein kleineres Quadrat $TUVW$ eingeschrieben ist. Das größere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 36 cm^2 und das kleinere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 25 cm^2 .

Ermittle den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks PTW .

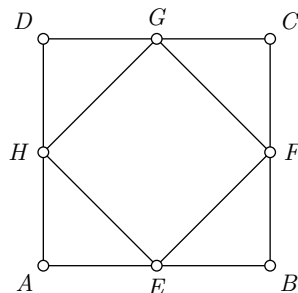


Abbildung a

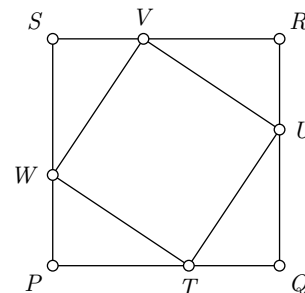


Abbildung b

- c) Ein Quadrat habe die Seitenlänge 32 cm . Es werden nun die Mittelpunkte der vier Seiten so verbunden, dass ein eingeschriebenes Quadrat entsteht. Dieses Verfahren wird fortgesetzt: Es entstehen weitere, immer kleinere eingeschriebene Quadrate.

Ermittle die Seitenlänge des zehnten, so eingeschriebenen Quadrates.

3. Aufgabe

Eine positive ganze Zahl soll auf Teilbarkeit durch 7 geprüft werden. Betrachtet wird die folgende Regel:

Die Einerziffer der Zahl wird gestrichen und dann wird das Doppelte der Einerziffer abgezogen. Wenn die so erhaltene Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist auch die Ausgangszahl durch 7 teilbar.

Beispiel: Aus der zu prüfenden Zahl 539 entsteht mit der Zwischenrechnung $53\cancel{9} - 2 \cdot 9 = 53 - 18$ die Zahl 35.

Da 35 durch 7 teilbar ist, ist nach der Regel auch 539 durch 7 teilbar.

- a) Zeige mit Hilfe dieser Regel, dass die Zahl 364 durch 7 teilbar ist.
- b) Zeige durch viermalige Anwendung dieser Regel, dass 3 645 068 durch 7 teilbar ist. Notiere hierzu die Zahlen, deren Teilbarkeit durch 7 zu prüfen ist. Berechne dann auch den Wert des Quotienten $3\ 645\ 068 : 7$ durch schriftliche Division.
- c) Beweise die Regel.

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Fritz erzählt: „Ich habe eine Tafel Schokolade gekauft. Sie hat mehr als 75 Cent, aber weniger als einen Euro gekostet. Ich hatte genau 3 Münzen in der Tasche. Mit genau einer davon habe ich bezahlt. Nachdem ich bezahlt und mein Wechselgeld zurück erhalten hatte, besaß ich exakt so viel Geld, dass ich damit eine weitere Tafel Schokolade derselben Sorte hätte bezahlen können.“

Hans erwidert: „Aus deinen Angaben kann man aber den Preis der Schokoladentafel nicht eindeutig bestimmen.“

Darauf antwortet Fritz: „Nach dem Kauf der Schokoladentafel hat mir der Händler genau eine Münze zurückgegeben.“

- Ermittle alle möglichen Preise dieser Schokoladentafel, wenn nur die Erzählung von Fritz bis zur Erwiderung von Hans bekannt ist.
- Zeige, dass der Preis dieser Schokoladentafel nach der Antwort von Fritz eindeutig bestimmbar ist.

Hinweis: Euro-Münzen sind 1-, 2-, 5-, 10-, 20- und 50-Centstücke und 1- und 2-Eurostücke.

2. Aufgabe

- Gabi hat vor sich ein 4×4 -Spielfeld und 16 Spielmarken, die durchnummeriert von 1 bis 16 beschriftet sind. Weil 7 ihre Glückszahl ist, nimmt sie die Spielmarke mit dieser Nummer als erste und legt sie auf das Feld in der linken oberen Ecke. Die anderen Spielmarken möchte sie so auf die übrigen Felder des 4×4 -Spielfeldes verteilen, dass die Summen der 4 Nummern jeder Zeile und jeder Spalte alle denselben Wert haben.

Zeige an einem Beispiel, dass Gabi dies erreichen kann.

- Frank hat 100 Spielmarken, die durchnummeriert von 1 bis 100 beschriftet sind. Er legt alle Marken, deren Beschriftung die Ziffer 7 enthalten, zur Seite.

Untersuche, ob er die noch verbleibenden Spielmarken derart auf ein 10×10 -Spielfeld verteilen kann, dass auf jedem Feld höchstens eine Marke liegt und die Summen der Nummern in jeder Zeile und jeder Spalte alle denselben Wert haben.

3. Aufgabe

- Die Abbildung a zeigt ein Quadrat $ABCD$, dem ein Quadrat $EFGH$ so einbeschrieben ist, dass die Eckpunkte des kleineren Quadrates $EFGH$ auf den Seitenmitten des Quadrates $ABCD$ liegen. Der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ beträgt 6 cm^2 .

Ermittle den Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$.

- Die Abbildung b zeigt ein Quadrat $PQRS$, dem ein kleineres Quadrat $TUVW$ einbeschrieben ist. Das größere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 36 cm^2 und das kleinere Quadrat hat einen Flächeninhalt von 25 cm^2 .

Ermittle den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks PTW .

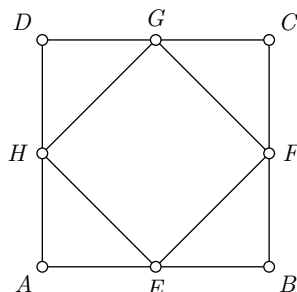


Abbildung a

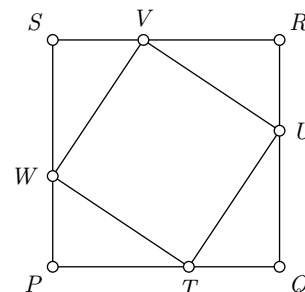


Abbildung b

- Ein Quadrat habe die Seitenlänge 32 cm . Es werden nun die Mittelpunkte der vier Seiten so verbunden, dass ein einbeschriebenes Quadrat entsteht. Dieses Verfahren wird fortgesetzt: Es entstehen weitere, immer kleinere einbeschriebene Quadrate.

Ermittle die Seitenlänge des zehnten, so einbeschriebenen Quadrates.

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 sollen so auf die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks verteilt werden, dass auf jedem Eckpunkt genau eine Zahl liegt. Dann wird die Zahl jedes Eckpunkts mit der Zahl des linken und rechten Nachbarpunkts multipliziert. So entstehen sechs *Nachbarschaftsprodukte* mit je drei Faktoren.

Beispiel: In der Reihenfolge $\dots, 2, 1, 3, 4, \dots$ bilden 2, 1 und 3 das Nachbarschaftsprodukt 6, und die Zahlen 1, 3 und 4 bilden das Nachbarschaftsprodukt 12.

- Die Zahlen 1 bis 6 werden aufsteigend im Uhrzeigersinn angeordnet. Gib die Summe der sechs Nachbarschaftsprodukte an.
- Gib eine Anordnung an, bei der die Summe der sechs Nachbarschaftsprodukte eine ungerade Zahl ist.
- Finde eine Anordnung, bei der möglichst wenige voneinander verschiedene Nachbarschaftsprodukte entstehen. Weise nach, dass es keine Anordnungen mit einer noch geringeren Anzahl geben kann.

2. Aufgabe

Velo Flitzeped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h und dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene wieder mit 20 km/h. Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermittle die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

3. Aufgabe

Mit Zirkel und Lineal sind Dreiecke ABC zu konstruieren, welche folgende Bedingungen erfüllen:

- Die Seite \overline{AB} hat die Länge c .
- Der Winkel CBA hat die Größe β .
- Der Punkt W ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zum Winkel BAC mit der Seite \overline{BC} .
- Die Strecke \overline{AW} hat die Länge w .

- Beschreibe deine Konstruktion.
Fertige eine Konstruktionszeichnung für $c = 6$ cm, $w = 5,4$ cm und $\beta = 60^\circ$ an.
- Beweise: Wenn ein Dreieck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gegebenen Bedingungen.
- Untersuche, ob es neben dem von dir für $c = 6$ cm, $w = 5,4$ cm und $\beta = 60^\circ$ konstruierten Dreieck weitere, zu diesem nicht kongruente Dreiecke gibt, welche die genannten Bedingungen erfüllen.

Hinweis: Bei einer *Konstruktion mit Zirkel und Lineal* sind Zirkel und Lineal ideale Instrumente. Mit dem idealen Zirkel kann der Abstand zweier beliebiger Punkte abgegriffen werden und mit einem solchen Abstand als Radius können Kreise um Punkte als Mittelpunkt konstruiert werden. Das ideale Lineal hat keine Skalierung. Dafür kann man mit ihm die Gerade durch zwei verschiedene Punkte konstruieren. Weitere Punkte können als Schnittpunkte von Geraden mit Geraden, Kreisen mit Kreisen und Geraden mit Kreisen konstruiert werden. Da das ideale Lineal keine Skalierungen hat, können mit ihm weder Längen gemessen noch abgetragen werden.

Die hier durch Angabe von Maßen vorgegebenen Streckenlängen und Winkelgrößen dürfen durch Abmessen mit (skaliertem) Lineal bzw. Winkelmesser einmalig in die Konstruktion übernommen werden.

28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Velo Flitzped macht eine Radtour. Zum Aufwärmen fährt er auf ebener Straße mit 20 km/h, dann mit 15 km/h bergauf, bis ihm die Puste ausgeht. Danach fährt er dieselbe Strecke zurück, bergab sehr vorsichtig mit 30 km/h und in der Ebene zunächst wieder mit 20 km/h. In den letzten 12 Minuten dreht er aber noch einmal auf und kommt in ihnen auf einen Schnitt von 30 km/h.

Insgesamt ist er 5 Stunden unterwegs.

Ermitteln Sie die Gesamtlänge der beschriebenen Radtour.

2. Aufgabe

Wenn man eine nichtnegative ganze Zahl mit sich selbst multipliziert, erhält man eine Quadratzahl. In einem mathematischen Wettbewerb zwischen den Spielern A und B geht es um das Erreichen von Quadratzahlen. Dazu steht beiden Spielern gemeinsam eine Liste mit den natürlichen Zahlen 1 bis 20 zur Verfügung. Die Startzahl des Spiels ist 210. Beide Spieler ziehen abwechselnd, wobei Spieler A den ersten Zug hat. Er darf sich eine der Zahlen von 1 bis 20 aussuchen und diese von der Startzahl subtrahieren. Wer danach am Zug ist, darf vom bis dahin erreichten Ergebnis wiederum eine der noch nicht verwendeten Zahlen von 1 bis 20 subtrahieren.

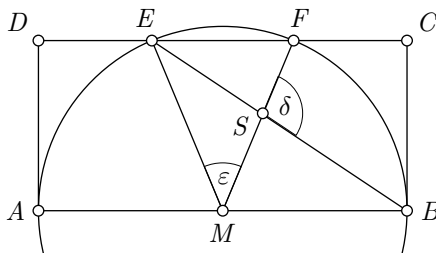
Wer mit seiner aktuellen Subtraktion auf eine Quadratzahl kommt, erhält dafür jeweils einen Punkt. Nachdem beide Spieler abwechselnd je 10 Zahlen subtrahiert haben, ist das Spiel zu Ende.

- Untersuchen Sie, ob der Spieler A „zu null“ gewinnen kann, d. h. ob B null Punkte haben kann.
- Untersuchen Sie, ob ein Endstand von $7 : 7$ Punkten möglich ist.
- A wettet mit B : „Ich verzichte darauf, im ersten Zug die Quadratzahl 196 einzunehmen. Trotzdem wirst du weder die Quadratzahl 196 noch die Quadratzahl 169 einnehmen können.“
Untersuchen Sie, ob A diese Wette bei intelligentem Spiel von B gewinnen kann.

3. Aufgabe

Die Seite \overline{AB} eines Rechtecks $ABCD$ ist gleichzeitig Durchmesser eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M . Der Kreis k schneidet die Seite \overline{CD} in den Punkten E und F (E liege dabei zwischen D und F).

- Die Strecken \overline{MF} und \overline{BE} schneiden sich in S . Drücken Sie die Winkelgröße $\delta = |\sphericalangle BSF|$ allgemein und vollständig durch die Winkelgröße $\varepsilon = |\sphericalangle FME|$ aus.
- Beweisen Sie: Wenn für das Seitenverhältnis $|AB| : |AD| = 3 : \sqrt{2}$ gilt, dann teilen E und F die Strecke \overline{CD} in drei gleiche Teile.



28. Essener Mathematikwettbewerb 2012/2013

als zweite Runde der 52. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen Q1, Q2, 13

1. Aufgabe

Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} &= 4, \\ (x+y)^2 + (x-y)^2 &= 82.\end{aligned}$$

2. Aufgabe

Man bestimme alle Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass $7p + 1$ eine Kubikzahl ist.

3. Aufgabe

Die Strecke \overline{AB} sei Durchmesser eines Kreises k . Der Punkt C sei ein innerer Punkt der Strecke \overline{AB} . Die Gerade g stehe im Punkt C senkrecht auf \overline{AB} . Der Punkt D sei ein Schnittpunkt der Geraden g mit dem Kreis k . Der Kreis k_1 berühre die Gerade g im Punkt D und gehe durch den Punkt A .

Man zeige, dass die Kreise k und k_1 gleiche Radien haben.

4. Aufgabe

Es seien a, b, c und d vier nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$. Man zeige, dass die sechs Zahlen

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a} + \sqrt{c}, \sqrt{a} + \sqrt{d}, \sqrt{b} + \sqrt{c}, \sqrt{b} + \sqrt{d} \text{ und } \sqrt{c} + \sqrt{d}$$

nicht sämtlich kleiner als 1 sein können.