29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

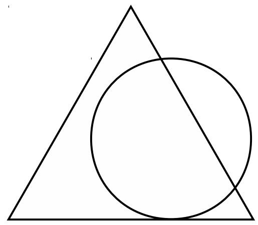
als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Ein Kreis und ein Dreieck können einander auf verschiedene Arten schneiden. Im Folgenden sollen immer Punkte betrachtet werden, wo Kreis und Dreieck einander richtig schneiden und nicht nur berühren; in der Abbildung schneidet der Kreis das Dreieck zweimal und einmal berührt er das Dreieck.



a) Zeichne einen Kreis und ein Dreieck, die einander genau zweimal schneiden und zwar so, dass die beiden Schnittpunkte auf derselben Dreiecksseite liegen.

b) Zeichne einen Kreis und ein Dreieck, die einander genau zweimal schneiden und zwar so, dass die beiden Schnittpunkte auf verschiedenen Dreiecksseiten liegen.

c) Zeichne einen Kreis und ein Dreieck, die einander genau viermal schneiden und zwar so, dass eine der Dreiecksseiten keinen Schnittpunkt aufweist.

d) Zeichne einen Kreis und ein Dreieck, die einander genau viermal schneiden und zwar so, dass alle Dreiecksseiten vom Kreis geschnitten werden.

e) Zeichne einen Kreis und ein Dreieck, die einander genau sechsmal schneiden.

Hinweis: Fertige alle Zeichnungen mit Zirkel und Lineal an.

2. Aufgabe

Bei dreistelligen Zahlen kann man viele Besonderheiten untersuchen.

a) So gibt es dreistellige Zahlen, deren letzte Ziffer (die Einerziffer) die Summe der ersten beiden Ziffern ist. Wie viele Zahlen dieser Art gibt es?

b) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen die Einerziffer das Produkt der ersten beiden Ziffern ist?

c) Gib alle dreistelligen Zahlen an, bei denen sich die Einerziffer ergibt, wenn man die Hunderterziffer durch die Zehnerziffer teilt.

3. Aufgabe

Dem Mathematiklehrer wird von seiner Klasse zum Geburtstag gratuliert. Die Frage nach seinem Lebensalter beantwortet er wie folgt:

(1) Ich bin älter als 42.

(2) Die Quersumme meines Alters ist einstellig.

(3) Die Einerstelle ist ungerade.

(4) Die Zehnerstelle hingegen ist gerade.

(5) Ätsch! Diese vier von mir gemachten Angaben (1), (2), (3) und (4) sind alle falsch.

Wie alt ist der Mathematiklehrer?

Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. Zum Beispiel hat die Zahl 65 die Quersumme 11.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Kann eine Summe von fünf beliebigen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen eine Primzahl sein?

a) Untersuche dazu drei selbst gewählte Beispiele.

b) Formuliere entsprechend der Frage eine Vermutung über die Summe von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.

c) Begründe deine Vermutung.

2. Aufgabe

Ein 7-Punkte-Graph besteht aus sieben Punkten und etlichen Wegen, die die Punkte verbinden. Dabei gelten folgende Bedingungen:

- Ein Weg verbindet zwei Punkte.
- Von jedem Punkt aus muss man zu jedem anderen Punkt gelangen können; allerdings muss die Verbindung nicht direkt sein.

a) Zeichne einen 7-Punkte-Graph mit 12 Wegen, bei dem von sechs der Punkte jeweils genau drei Wege ausgehen. Stelle die Wege dabei durch Strecken dar.

b) Zeichne einen 7-Punkte-Graph mit 12 Wegen, bei dem von vier Punkten je drei Wege ausgehen und von den anderen drei Punkten je vier Wege. Stelle die Wege dabei durch Strecken dar.

3. Aufgabe

Stephanie malt ein Quadrat mit 4×4 Feldern auf. In die Felder dieses Quadrats trägt sie Zahlen von 1 bis 4 ein, und zwar so, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen diese Zahlen jeweils genau einmal stehen.

a) Gib ein Beispiel für eine solche Verteilung dieser Zahlen an.

b) Stephanie gelingt es auch, ein 5×5-Quadrat nach den gleichen Regeln mit den Zahlen von 1 bis 5 zu füllen.
Gib ebenfalls eine solche Verteilung dieser Zahlen an.

c) Warum kann es Stephanie nicht gelingen, entsprechend ein 3×3-Quadrat mit Zahlen von 1 bis 3 zu füllen?

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Von den Schülern einer Klassenstufe eines sprachlichen Gymnasiums wählte jeder genau einen Kurs aus den drei angebotenen Fremdsprachen Spanisch, Portugiesisch und Russisch aus. Genau drei Viertel aller Schüler entschieden sich für Spanisch, genau ein Neuntel für Russisch und die übrigen zehn Schüler für Portugiesisch.

Ermittle, wie viele Schüler den Spanisch-Kurs und wie viele den Russisch-Kurs wählten.

2. Aufgabe

Wir haben eine Balkenwaage ohne Wägestücke und drei Münzhaufen vor uns. Alle Münzen sind äußerlich gleich. In jedem der drei Haufen befindet sich aber genau eine falsche Münze, die leichter als die anderen, untereinander gleich schweren Münzen ist.

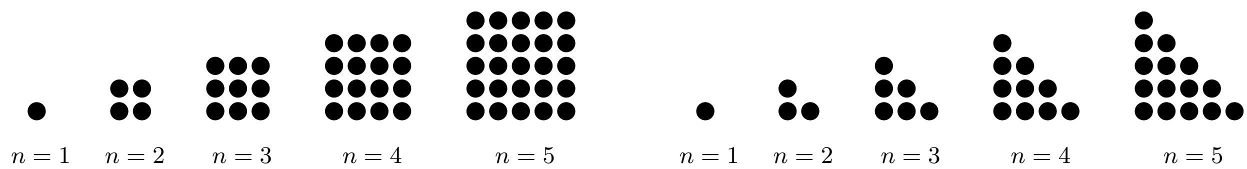
a) Der erste Haufen besteht aus genau neun Münzen.
Erkläre, wie man mit höchstens zwei Wägungen die falsche Münze herausfinden kann.

b) Der zweite Haufen besteht aus genau zehn Münzen.
Weise nach, dass man mit höchstens drei Wägungen die falsche Münze herausfinden kann.

c) Der dritte Haufen besteht aus genau 26 Münzen.
Weise nach, dass man auch hier mit höchstens drei Wägungen die falsche Münze herausfinden kann.

3. Aufgabe

Sabrina beschäftigt sich gern mit Figurenfolgen.



a b

a) Die erste Figurenfolge besteht aus quadratisch angeordneten Plättchen. Die ersten fünf Figuren zeigt Abbildung a.

Ermittle, wie viele Plättchen sie jeweils für die 6., 7. und 25. Figur benötigt.

Untersuche, ob eine Figur dieser Folge mit genau 200 Plättchen gelegt werden kann.

b) Die zweite Figurenfolge besteht aus in Dreiecken angeordneten Plättchen. Die ersten fünf Figuren zeigt Abbildung b.

Gib an, wie viele Plättchen sie jeweils für die 4., 5., 6. und 7. Figur benötigt.

c) Sabrina möchte herausfinden, wie viele Plättchen sie jeweils für die nächste Figur der Folge aus Teil b) benötigt. Dazu überlegt sie sich zuerst, wie viele Plättchen von der n-ten Figur zur $(n+1)$-ten Figur hinzukommen.

Ermittle eine Formel, mit der man allgemein die Anzahl d_{n+1} der Plättchen in der $(n+1)$-ten Figur aus der Anzahl d_n in der vorherigen Figur berechnen kann. Berechne mit dieser Formel d_8 aus d_7.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Von den 36 Teilnehmern eines Absolvententreffens wohnt jeder in genau einem der Bundesländer Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg, Sachsen. Außerdem ist bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte aller Absolventen wohnt in Bayern.

(2) Es sind mehr Teilnehmer aus Sachsen als aus Hamburg.

(3) Die Teilnehmer aus Hessen und Niedersachsen zusammen sind ein Neuntel aller Teilnehmer.

(4) In Hamburg wohnen doppelt so viele von diesen Absolventen wie in Hessen.

(5) Die Anzahl der Absolventen aus Hessen ist größer als das Doppelte, aber kleiner als das Vierfache der Anzahl der Absolventen aus Niedersachsen.

Ermittle, wie viele Teilnehmer an diesem Treffen jeweils in Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg bzw. Sachsen wohnen.

2. Aufgabe

Friederikes Spielkiste enthält viele gleich große, einfarbige Kugeln in fünf verschiedenen Farben. Sie entnimmt der Kiste vier Kugeln und baut daraus auf einem Drehteller eine Kugelpyramide. Eine solche Pyramide besteht aus drei unteren Kugeln, welche auf dem Drehteller liegen und einander paarweise berühren, sowie einer oberen Kugel, welche die drei unteren berührt. Zwei Kugelpyramiden gelten als verschieden, wenn sie nicht durch Drehen des Tellers ineinander überführt werden können.

Ermittle, wie viele verschiedene Kugelpyramiden sich errichten lassen.

3. Aufgabe

Von einem Dreieck ABC wird gefordert:

(1) Der Innenwinkel BAC hat die Größe $\alpha = 45°$.

(2) Die Strecke $\overline{CD}$ vom Punkt C zum Lotfußpunkt D auf der Geraden AB ist 5 cm lang.

(3) Der (spitze) Winkel zwischen der Geraden CD und der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels ACB hat eine Größe δ mit $\delta > 0°$.

a) Konstruiere ein solches Dreieck ABC für $\delta = 10°$ und beschreibe deine Konstruktion.

b) Überprüfe anhand der Zeichnung, ob es für $\delta = 10°$ mehrere zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Wir betrachten Folgen natürlicher Zahlen, bei denen die ersten zwei Zahlen vorgegeben sind und jede weitere Zahl die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen ist.

a) Es gelte $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n > 0$.
So gilt beispielsweise $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ und $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$.

Berechne das Folgenglied a_8.

b) Ermittle für die Zahlenfolge aus Aufgabe a), ob das Folgenglied a_{2013} eine gerade oder ob es eine ungerade Zahl ist.

c) Eine andere Zahlenfolge habe als Startwerte die beiden natürlichen Zahlen $a_1 = c$ und $a_2 = d$, und wieder gelte $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n > 0$. Das Folgenglied a_{20} sei ungerade.

Untersuche, für welche der beiden Zahlen c und d man mit Sicherheit sagen kann, ob sie gerade oder ob sie ungerade ist.

2. Aufgabe

a) Untersuche, ob für zwei positive ganze Zahlen b und c der Nachfolger von $b \cdot c + b + c$ eine Primzahl sein kann.

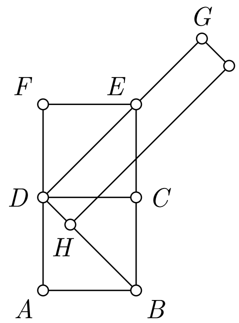
b) Finde alle geordneten Paare positiver ganzer Zahlen (b, c) mit $b \cdot c + b + c = 2013$.

3. Aufgabe

Die beiden Quadrate $ABCD$ und $DCEF$ besitzen die gemeinsame Seite $\overline{CD}$ und damit eine gemeinsame Seitenlänge a. Auf der Verlängerung der Diagonalen $\overline{DE}$ über E hinaus liegt ein Punkt G mit $|EG| = a$. Auf der Diagonalen $\overline{DB}$ liegt ein Punkt H mit $|HB| = a$. Die Punkte D, G und H sind drei von vier Eckpunkten eines Rechtecks.

Vergleiche den Flächeninhalt dieses Rechtecks mit dem Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ und entscheide, ob beide gleich oder ob sie verschieden sind.

Hinweis: Taschenrechnerergebnisse mit gerundeten Messwerten werden nicht akzeptiert.



29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

a) Untersuche, ob für zwei positive ganze Zahlen b und c der Nachfolger von $b \cdot c + b + c$ eine Primzahl sein kann.

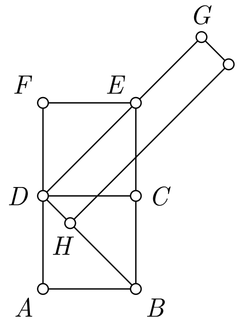
b) Finde alle geordneten Paare positiver ganzer Zahlen (b, c) mit $b \cdot c + b + c = 2013$.

2. Aufgabe

Die beiden Quadrate $ABCD$ und $DCEF$ besitzen die gemeinsame Seite $\overline{CD}$ und damit eine gemeinsame Seitenlänge a. Auf der Verlängerung der Diagonalen $\overline{DE}$ über E hinaus liegt ein Punkt G mit $|EG| = a$. Auf der Diagonalen $\overline{DB}$ liegt ein Punkt H mit $|HB| = a$. Die Punkte D, G und H sind drei von vier Eckpunkten eines Rechtecks.

Vergleiche den Flächeninhalt dieses Rechtecks mit dem Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ und entscheide, ob beide gleich oder ob sie verschieden sind.

Hinweis: Taschenrechnerergebnisse mit gerundeten Messwerten werden nicht akzeptiert.



3. Aufgabe

Mario und Luigi sind mit dem Auto unterwegs. Sie wechseln sich beim Fahren ab. Wenn Luigi am Steuer sitzt, fahren sie doppelt so schnell wie mit Mario am Steuer. Auf der Fahrt von Adorf nach Cedorf fährt jeder die Hälfte der Zeit. Auf dem Rückweg nehmen sie dieselbe Strecke, allerdings fährt diesmal jeder die Hälfte des Weges. Für die Rückfahrt brauchen sie genau eine Stunde länger als für die Hinfahrt.

Wie lange dauert die Hinfahrt?

Hinweis: Wir nehmen an, dass Mario und Luigi jeweils stets mit konstanter Geschwindigkeit fahren. Die Zeiten, die sie für Pausen und Fahrerwechsel benötigen, sollen vernachlässigt werden.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als erste Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klassen Q1 und Q2

1. Aufgabe

Man bestimme für alle Tripel $(x,\, y,\, z)$ positiver ganzer Zahlen, die das Gleichungssystem

$$-10\,(z-2xy)+\frac{y-5}{x}=52\,, \tag{1}$$

$$x-y+z=53\,, \tag{2}$$

$$x\,(y+7)=54 \tag{3}$$

erfüllen, das Produkt xyz.

2. Aufgabe

Kalorina verwahrt in ihrem Kühlschrank 2013 Speisen verschiedener Sorten. Von keiner Sorte sind mehr als 183 Stück vorhanden.

Man zeige, dass Kalorina einen Speiseplan für die nächsten 183 Tage erstellen kann, bei dem sie jeden Tag 11 Speisen verschiedener Sorten isst.

3. Aufgabe

Es seien $n \geq 2$ ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, und es sei bekannt, dass jede von ihnen als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann.

Man zeige, dass dann auch das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ gleich der Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen ist.