29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Judith beschäftigt sich mit Primzahlen.

a) Sie betrachtet alle Primzahlen, die kleiner als 30 sind; Judith verdoppelt sie jeweils und addiert danach 1. Untersuche, in welchen Fällen das Ergebnis dieser Rechnung wieder eine Primzahl ist. Schreibe alle deine Rechnungen auf.

Nun will Judith Primzahlen mit 3 multiplizieren und danach wieder 1 addieren.

b) Gib **eine** Primzahl an, bei der nach Multiplikation mit 3 und nachfolgender Addition von 1 wieder eine Primzahl entsteht.

c) Gib alle Primzahlen an, bei denen nach Multiplikation mit 3 und nachfolgender Addition von 1 wieder eine Primzahl entsteht. Begründe dein Ergebnis.

2. Aufgabe

Jens sitzt gerade im Zug, sieht sich in seinem Wagen um und denkt sich für seine Freunde in der Mathematik-AG eine Aufgabe aus:

(1) Die Anzahl aller Personen in meinem Abteil ist eine Quadratzahl zwischen 26 und 50.

(2) Es ist ein Erwachsener mehr als Kinder.

(3) Es sind zweimal so viele Mädchen wie Jungen.

(4) Es sind drei Frauen mehr als Männer.

a) Aus der Aussage (1) kann man herleiten, dass für die Anzahl der Personen nur zwei Zahlen in Frage kommen.
Welche Zahlen sind das?

b) Aus der Aussage (2) kann man dann herleiten, wie viele Personen und wie viele Kinder im Wagen sind. Gib diese Anzahlen an und begründe.

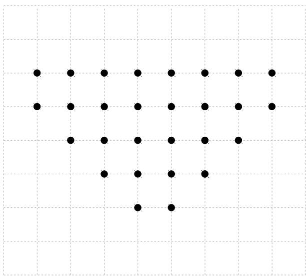
c) Wie viele Frauen, Männer, Mädchen und Jungen fahren in dem Wagen? Begründe!

Hinweis: Eine Quadratzahl ist eine Zahl, die als Ergebnis einer Multiplikation einer Zahl mit sich selbst entsteht. Zum Beispiel sind 81 und 144 Quadratzahlen, denn $81 = 9 \cdot 9$ und $144 = 12 \cdot 12$.

3. Aufgabe

Isabel gibt sich auf Kästchenpapier eine Anzahl von Punkten vor. Sie möchte alle möglichen Quadrate finden, deren Eckpunkte ausschließlich auf solchen vorgegebenen Punkten liegen.

In der Figur gibt sich Isabel 28 Punkte vor (siehe Abbildung). Isabel kann in diese Figur Quadrate verschiedener Größe einzeichnen.
Zeichne für jede Größe jeweils ein Beispielquadrat und gib an, wie viele Quadrate sie von der jeweiligen Größe einzeichnen kann.



Verwende das beigelegte Arbeitsblatt. Es enthält hinreichend viele Figuren, so dass du alle Lösungen eintragen kannst.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Es sind die Ziffern $1, 2, 4, 7$ gegeben.

a) Wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kannst du aus diesen Ziffern bilden, wenn in jeder Zahl jede Ziffer genau einmal vorkommen soll?

b) Wie viele der unter a) ermittelten Zahlen sind durch 4 teilbar? Gib diese Zahlen an.

c) Wie viele dreistellige Zahlen kannst du aus den vorgegebenen Ziffern bilden, wenn diese in den Zahlen auch mehrfach vorkommen dürfen?
Wie viele dieser dreistelligen Zahlen haben genau zwei gleiche Ziffern?

2. Aufgabe

Bettina und Luca schneiden sich jeweils ein Quadrat aus. Danach schneiden sie jeweils parallel zu einer Quadratseite Teile ihrer Quadrate ab.

a) Bettinas erster Schnitt halbiert die Fläche des ursprünglichen Quadrats. Dann schneidet sie von der Restfigur wieder die Hälfte ab und erhält erneut ein Quadrat. Sie schneidet jetzt noch zweimal jeweils die Hälfte ab und erhält danach wiederum ein Quadrat. Sie misst nach und stellt fest, dass am Ende ihr letztes Quadrat eine Fläche von $16\,\text{cm}^2$ hat.
Welche Seitenlänge hatte Bettinas Quadrat am Anfang?

b) Luca schneidet von seinem anfänglichen Quadrat zunächst $\frac{1}{4}$ der Fläche weg, dann noch mal $\frac{1}{4}$ und erhält wieder ein Quadrat. Von diesem Quadrat schneidet er wieder parallel zu den Seiten $\frac{1}{3}$ der Fläche ab und dann im vierten Schnitt noch einmal $\frac{1}{3}$ der Fläche. Das Ergebnis ist wieder ein Quadrat, das – wie Bettinas Quadrat – ebenfalls einen Flächeninhalt von $16\,\text{cm}^2$ hat.
Welchen Flächeninhalt hatte Lucas Quadrat am Anfang?

3. Aufgabe

Zum Klassenfest werden viele Luftballons gebraucht. Ole, Ramon, Benjamin und Gunnar melden sich zum Luftballonaufpusten. Als sie eine Pause einlegen, vergleichen sie die Anzahlen ihrer Ballons: Ole hat den dritten Teil aller bereits aufgeblasenen Ballons aufgepustet, Benjamin den vierten Teil, Ramon den sechsten Teil, und Gunnar hat 12 geschafft.

a) Wie viele Ballons wurden bis zur Pause insgesamt aufgepustet, und wer hat die meisten Luftballons aufgeblasen?

Vorher hatten die Jungen sich geeinigt, dass jeder nur Ballons einer Farbe aufpustet. Es sind rote, blaue, gelbe und orangefarbene Luftballons da. Keiner hat die Farbe genommen, deren Name mit dem Anfangsbuchstaben seines Namens beginnt. Die Mädchen der Klasse sollen anschließend herausbekommen, wer welche Ballonfarbe hatte. Die Jungen geben den Mädchen folgende Informationen:

(1) Ole hat die roten oder die gelben Ballons aufgepustet.
(2) Benjamin hat die gelben oder die orangefarbenen Ballons aufgepustet.
(3) Ramon hat die roten oder die blauen Ballons aufgepustet.
(4) Gunnar hat die orangefarbenen oder die blauen Ballons aufgepustet.

b) Welcher Junge hat welche Ballonfarbe ausgewählt?

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Wir betrachten Zahlen, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(1) Jede solche Zahl ist eine sechsstellige positive ganze Zahl.

(2) In jeder solchen Zahl tritt jede Ziffer höchstens zweimal auf.

(3) In jeder solchen Zahl treten die Ziffern 9, 0, 1, 1 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischen stehende andere Ziffern auf.

Ermittle die größte und die kleinste dieser Zahlen.

2. Aufgabe

In der Klausur der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade können maximal 40 Punkte erreicht werden. Paula ist an ihrem Ergebnis sehr interessiert und fragt ihren Mathematik-Lehrer. Dieser antwortet:

(1) „Ein Teiler deiner Gesamtpunktzahl ist eine Mirpzahl."

(2) „Wenn du die Quersumme deiner Gesamtpunktzahl verdoppelst und 7 addierst, erhältst du auch eine Mirpzahl."

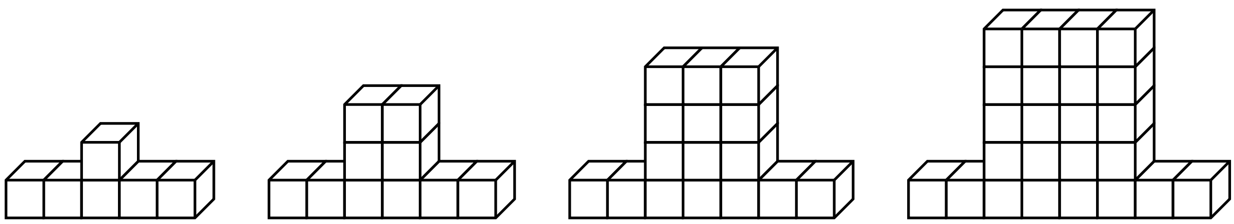
Zeige, dass aus diesen Angaben Paulas Gesamtpunktzahl eindeutig bestimmt werden kann, und gib diese Gesamtpunktzahl an.

Bemerkung: Eine *Mirpzahl* ist eine Primzahl, die eine andere Primzahl ergibt, wenn man die Ziffern von rechts nach links liest. Folglich ist 13 die erste Mirpzahl. Liest man das Wort „mirp" von rechts nach links, so erhält man das Wort „prim".

3. Aufgabe

Betrachtet wird eine Folge von Figuren, welche aus gleich großen Würfeln zusammengesetzt werden. Siehe hierzu die Abbildung. Jede Figur besteht aus einem Fundament und dem dazugehörigen Aufbau. Die Vorderansicht des Fundaments ist ein Rechteck, die Vorderansicht des Aufbaus ist ein zugehöriges Quadrat. Das Fundament ist nach links und nach rechts um jeweils genau zwei Würfel länger als der Aufbau. Von einer Figur zur nächsten kommt im Fundament genau ein Würfel hinzu.

Die Anzahl der Würfel der n-ten Figur wird mit w_n bezeichnet. Offenbar gelten $w_1 = 6$ und $w_2 = 10$. Es entsteht so eine aus den Würfelanzahlen gebildete Zahlenfolge $w_1, w_2, w_3, \ldots$



$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $n = 4$

a) Gib die Glieder w_3, w_4, w_5 und w_6 der Zahlenfolge an.

b) Berechne das hundertste Glied w_{100} der Zahlenfolge. Überlege dir dazu, wie man w_n in Abhängigkeit von n ermitteln kann, und nutze diese Formel für die geforderte Berechnung.

c) Untersuche, ob 999 ein Glied der Zahlenfolge ist, und begründe deine Feststellung.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

In der Klausur der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade können maximal 40 Punkte erreicht werden. Paula ist an ihrem Ergebnis sehr interessiert und fragt ihren Mathematik-Lehrer. Dieser antwortet:

(1) „Ein Teiler deiner Gesamtpunktzahl ist eine Mirpzahl."

(2) „Wenn du die Quersumme deiner Gesamtpunktzahl verdoppelst und 7 addierst, erhältst du auch eine Mirpzahl."

Zeige, dass aus diesen Angaben Paulas Gesamtpunktzahl eindeutig bestimmt werden kann, und gib diese Gesamtpunktzahl an.

Bemerkung: Eine *Mirpzahl* ist eine Primzahl, die eine andere Primzahl ergibt, wenn man die Ziffern von rechts nach links liest. Folglich ist 13 die erste Mirpzahl. Liest man das Wort „mirp" von rechts nach links, so erhält man das Wort „prim".

2. Aufgabe

Beweise folgende Sätze:

a) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann ist die Summe der Größen zweier zu verschiedenen Eckpunkten gehörender Außenwinkel immer doppelt so groß wie die Summe der Größen der zugehörigen Innenwinkel.

b) Wenn in einem Dreieck die Summe der Größen je zweier zu verschiedenen Eckpunkten gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der Größen der beiden zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck gleichseitig.

3. Aufgabe

Professor Altmann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen stößt er auf ein Kästchen mit zehn Hölzchen, von denen keine zwei gleich lang sind. Er weiß, dass damals kleine Längen in Fingerbreiten, als Einheit abgekürzt fb, gemessen wurden. Bei Anordnung der Hölzchen der Länge nach vom kürzesten zum längsten stellt er fest, dass die Längendifferenz aufeinanderfolgender Hölzchen konstant d Fingerbreit beträgt. Sind also $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ die Maßzahlen der geordneten Hölzchenlängen, so gilt $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $\ldots$, $a_{10} = a_9 + d$.

Prof. Altmann vermutet, dass die Hölzchen früher einmal der Längenmessung dienten, indem Summen durch Hintereinanderlegen und Differenzen durch Nebeneinanderlegen bei gleichem Anfangspunkt gebildet wurden. Um diese Vermutung zu untersuchen, hat er jeweils einige der Hölzchen hintereinandergelegt: Das kürzeste und zweitkürzeste Hölzchen haben zusammen eine Länge von 13 fb, die Summe der Längen des viert- bis einschließlich siebtkürzesten Hölzchens beträgt 74 fb.

a) Bestimme allgemein die Maßzahl der Länge a_n des n-ten Hölzchens in Abhängigkeit von n und gib dann die Maßzahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ an.

b) Wie kann man durch Ablegen geeigneter Hölzchen Längen von 67 fb, 2 fb und 1 fb abmessen?

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Professor Altmann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen stößt er auf ein Kästchen mit zehn Hölzchen, von denen keine zwei gleich lang sind. Er weiß, dass damals kleine Längen in Fingerbreiten, als Einheit abgekürzt fb, gemessen wurden. Bei Anordnung der Hölzchen der Länge nach vom kürzesten zum längsten stellt er fest, dass die Längendifferenz aufeinanderfolgender Hölzchen konstant d Fingerbreit beträgt. Sind also $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ die Maßzahlen der geordneten Hölzchenlängen, so gilt $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $\ldots$, $a_{10} = a_9 + d$.

Prof. Altmann vermutet, dass die Hölzchen früher einmal der Längenmessung dienten, indem Summen durch Hintereinanderlegen und Differenzen durch Nebeneinanderlegen bei gleichem Anfangspunkt gebildet wurden. Um diese Vermutung zu untersuchen, hat er jeweils einige der Hölzchen hintereinandergelegt: Das kürzeste und zweitkürzeste Hölzchen haben zusammen eine Länge von 13 fb, die Summe der Längen des viert- bis einschließlich siebtkürzesten Hölzchens beträgt 74 fb.

a) Bestimme allgemein die Maßzahl der Länge a_n des n-ten Hölzchens in Abhängigkeit von n und gib dann die Maßzahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ an.

b) Wie kann man durch Ablegen geeigneter Hölzchen Längen von 67 fb, 2 fb und 1 fb abmessen?

c) Untersuche, ob jede ganzzahlige Länge von 1 fb bis 34 fb durch Verwendung von jeweils höchstens 4 Hölzchen gemessen werden kann, wobei in jeder Messung jedes Hölzchen höchstens einmal verwendet werden darf.

2. Aufgabe

Die Abbildung zeigt ein Dreieck ABC und ein unter der Seite $\overline{AB}$ errichtetes Viereck $AFGB$. Es wird vorausgesetzt:

(1) Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel.

(2) Die Seite $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie die Seite $\overline{AC}$.

(3) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

(4) Das Viereck $AFGB$ ist ein Quadrat.

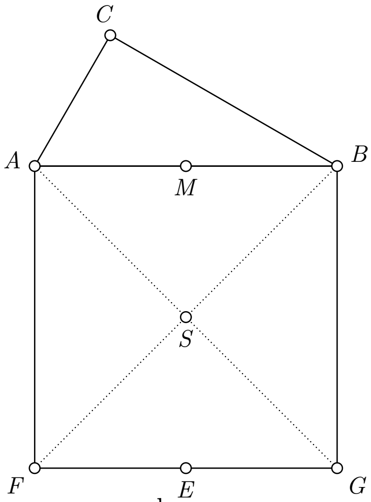
(5) Der Punkt E ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$.

(6) Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks $AFGB$.

(7) Das Dreieck AMC ist gleichseitig.

a) Ermittle die Größen der Innenwinkel des Fünfecks $AFESC$.

b) Beweise, dass die Aussage (7) aus den Voraussetzungen (1), (2) und (3) folgt.



Hinweis: Es ist nicht zulässig, Messwerte zum Bestimmen der Winkelgrößen zu verwenden.

3. Aufgabe

Ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 1 wird in drei Rechtecke R_1, R_2 und R_3 mit unterschiedlichen Flächeninhalten zerlegt. Die Flächeninhalte dieser drei Rechtecke werden mit F_1, F_2 und F_3 bezeichnet.

Bestimme alle Möglichkeiten, das Quadrat so zu zerlegen, dass der größte Wert der drei Flächeninhalte viermal so groß wie der kleinste Wert ist und (gleichzeitig) doppelt so groß wie der mittlere Wert der Flächeninhalte.

Kurz, falls F_1 der größte Flächeninhalt und F_3 der kleinste ist, so soll gelten:

$$F_1 : F_2 : F_3 = 4 : 2 : 1\,.$$

Gib für jedes der Rechtecke jeweils die Seitenlängen an.

Zwei Zerlegungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Drehen und/oder Spiegeln ineinander überführt werden können.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Aus einer beliebigen Zahl x werden drei Streckenlängen a, b und c nach folgender Vorschrift berechnet: $a = 20 + 15\,x$, $b = 130 + 5\,x$ und $c = 170 - 5\,x$. Aus den drei Strecken mit diesen Längen a, b und c soll ein Dreieck konstruiert werden.

a) Weisen Sie nach, dass für $x = 8$ ein solches Dreieck existiert und für $x = 0$ kein solches Dreieck existiert.

b) Ermitteln Sie den kleinsten und den größten ganzzahligen Wert von x, für den Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c existieren.

c) Ermitteln Sie alle rationalen Zahlen x, für die ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gleichschenklig ist.

2. Aufgabe

Zwei Folgen ganzer Zahlen (a_n) und (b_n) sind gegeben durch ihre Bildungsvorschriften

$$a_1 = p,\ a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ für alle } n > 0$$

bzw.

$$b_1 = p,\ b_2 = q \text{ und } b_{n+2} = b_n - b_{n+1} \text{ für alle } n > 0\,.$$

a) Es sei $p = 1$ und $q = 4$. Geben Sie die Folgenglieder a_1 bis a_8 an.

b) Eine Zahlenfolge (x_n) heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k so gibt, dass für jedes Folgenglied x_n die Beziehung $x_n = x_{n+k}$ gilt. Die Periodenlänge einer periodischen Folge (x_n) ist definiert als die *kleinste* positive ganze Zahl k mit der Eigenschaft, dass $x_n = x_{n+k}$ für jedes Folgenglied x_n gilt.
Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) für beliebige Startwerte p und q stets periodisch ist, und ermitteln Sie alle für (a_n) möglichen Periodenlängen.

c) Ermitteln Sie alle Paare ganzer Zahlen (p, q), für die das Folgenglied b_6 den Wert 0 annimmt.

3. Aufgabe

Im Folgenden werden Trapeze $ABCD$ betrachtet. Dabei soll stets AB parallel zu CD sein, die Winkel BAD und ADC sollen rechte Winkel sein und für die Länge von $\overline{BC}$ soll gelten, dass sie gleich der Summe der Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ ist.

a) Bestimmen Sie die Länge von $\overline{AD}$, wenn $|AB| = 9\,\text{cm}$ und $|CD| = 4\,\text{cm}$ gilt.

b) Beweisen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gleich $|MC| \cdot |MB|$ ist, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ ist.

29. Essener Mathematikwettbewerb 2013/2014

als zweite Runde der 53. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen Q1, Q2

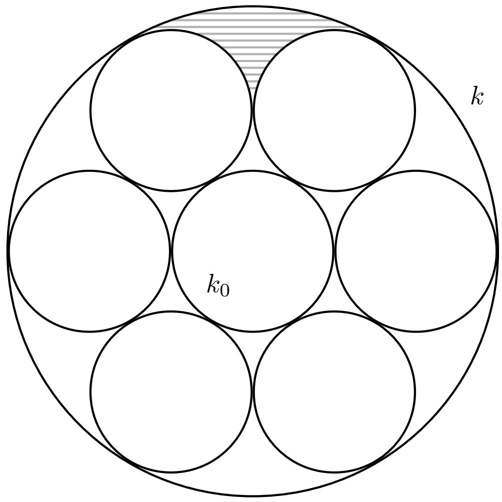
1. Aufgabe

Man bestimme alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 7\,, \\ 2x + y + 3z &= 9\,, \\ 3x + y + 4z &= 11\,. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

Zwei konzentrische Kreise k und k_0 liegen so zueinander, dass es genau sechs zum Kreis k_0 kongruente Kreise gibt, die den Kreis k_0 von außen, den Kreis k von innen und je zwei der sechs Kreise berühren. Man berechne die Größe des Inhalts des schraffierten Flächenstückes in Abhängigkeit vom Radius r des Kreises k_0.



3. Aufgabe

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und n reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Summe dieser n Zahlen sei s. Bekannt sei, dass für jede dieser Zahlen die Ungleichung

$$x_i \leq \frac{1}{n+1}(s + 2013)$$

erfüllt ist. Man zeige, dass man dann eine dieser Zahlen x_m $(1 \leq m \leq n)$ so auswählen kann, dass für beliebige Indizes i und j stets gilt

$$x_i - x_j \leq \frac{1}{2}(2013 - x_m)\,.$$