30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

In den folgenden Aufgaben sollen jeweils vier Kreise gezeichnet werden, die eine vorgegebene Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben.

Zeichne sauber und benutze immer einen Zirkel!

a) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich acht Schnittpunkte ergeben.

b) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich zehn Schnittpunkte ergeben.

c) Zeichne vier gleich große Kreise so, dass sich zwölf Schnittpunkte ergeben.

d) Begründe, dass es bei vier Kreisen nicht mehr als zwölf Schnittpunkte geben kann.

2. Aufgabe

Du hast neun Ziffernkarten, auf denen die Ziffern 1 bis 9 jeweils **einmal** vorkommen. Mit diesen Ziffernkarten sollen zweistellige oder dreistellige Zahlen so gebildet werden, dass folgende Summen mit jeweils zwei Summanden entstehen.

a) Lege sechs dieser Ziffernkarten zu einer richtigen Additionsaufgabe $\square\square + \square\square = \square\square$ zusammen.

b) Die Ziffernkarten 8 und 1 sollen jetzt das Ergebnis bilden: $\square\square + \square\square = \boxed{8}\boxed{1}$.
Finde alle sechs Möglichkeiten, mit den verbliebenen Ziffernkarten richtige Additionsaufgaben zusammenzustellen. Hierbei zählt eine Vertauschung der Summanden nicht als neue Additionsaufgabe.

c) Lege alle neun Ziffernkarten zu einer richtigen Additionsaufgabe $\square\square\square + \square\square\square = \square\square\square$ zusammen.

3. Aufgabe

Die drei Schwestern Birte, Caroline und Dana hatten vor drei Jahren zusammen 48 Perlen geerbt. Jede hatte so viele Perlen bekommen, wie sie alt war.

Zuerst gab Birte die Hälfte ihrer Perlen zu gleichen Teilen an die beiden Schwestern ab.

Danach gab Caroline die Hälfte ihrer jetzigen Perlen zu gleichen Teilen an ihre Schwestern.

Am Ende gab Dana die Hälfte der Perlen, die sie nun hatte, zu gleichen Teilen an Birte und Caroline.

Das Staunen war groß, als dann alle gleich viele Perlen hatten.

Wie alt sind die Schwestern jetzt?

Ein Tipp: Arbeite dich von hinten nach vorn durch, also von der letzten Verteilung zur ersten. (Das nennt man Rückwärts-Arbeiten.)

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde
Klasse 6

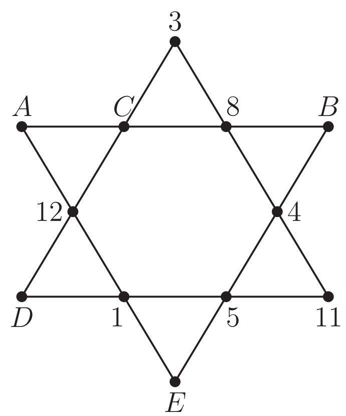
1. Aufgabe

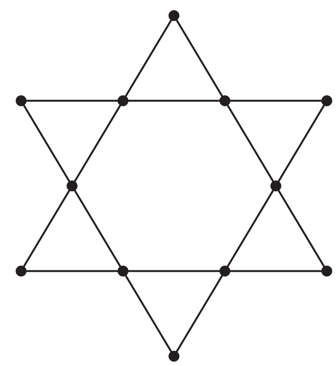
Sabrina mag Sterne und Zahlen. Sie denkt sich deshalb für ihre Freundin folgendes Sternen-Zahlen-Rätsel aus:

In einer Sternfigur sind natürliche Zahlen so eingetragen, dass die Summe von je vier Zahlen, die auf einer gemeinsamen geraden Linie stehen, für alle sechs Linien gleich ist.

a) In der dargestellten Sternfigur wurden einige Zahlen durch Buchstaben ersetzt. Finde für die jeweiligen Buchstaben die entsprechenden Zahlen und überprüfe deine Eintragungen durch Kontrollrechnungen.

b) In einer gleichartigen Sternfigur sollen nun die ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5 bis 23 so eingetragen werden, dass wieder auf jeder der sechs Linien die Summe der eingetragenen Zahlen gleich ist. Gib eine Lösungsmöglichkeit an.
Eine Herleitung wird nicht verlangt.





2. Aufgabe

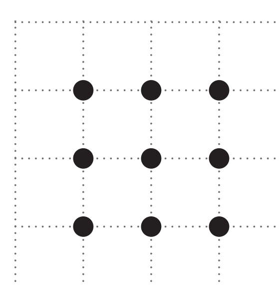
Wähle dir zwei verschiedene zweistellige Primzahlen aus. Bilde aus ihnen durch Hintereinanderschreiben die beiden möglichen vierstelligen Zahlen. Wenn du nun die kleinere der beiden vierstelligen Zahlen von der größeren subtrahierst, dann erhältst du deren Differenz.

a) Finde die größtmögliche Differenz, die du auf diese Weise erhalten kannst.

b) Finde die kleinstmögliche Differenz, die du auf diese Weise erhalten kannst.
Gib alle Paare von Primzahlen an, mit denen du diese kleinste Differenz erhältst.
Wie viele Paare sind es?

c) Warum kann keine der Differenzen eine Primzahl sein?

3. Aufgabe



Auf diesem Nagelbrett können verschiedene Dreiecke mit einem Gummiband aufgespannt werden.

a) Zeichne alle verschieden geformten Dreiecke auf. Zeichne jede Form in ein neues Nagelbrett. (Dreiecke gelten als verschieden, wenn sie nicht durch Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen.)

b) Gib für jede verschiedene Dreiecksform aus dem Aufgabenteil a) an, wie oft man sie in verschiedenen Lagen auf dem Nagelbrett aufspannen kann.

c) Das kleinste von 4 Nägeln gebildete Quadrat hat einen Flächeninhalt von $1\,\mathrm{cm}^2$. Sortiere die Dreiecksformen nach ihrer Flächengröße.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Ermittle die Anzahl aller positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich 1 000 000, die gleichzeitig durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 teilbar sind.

2. Aufgabe

Anita, Beate und Christina haben zusammen genau 5 Ringe, nämlich 2 aus Gold und 3 aus Silber. Jede hat mindestens einen und höchstens zwei Ringe. Sie unterhalten sich, allerdings sagt hier keines der drei Mädchen die Wahrheit.

Anita sagt: „Ich habe einen Goldring und einen Silberring.“ Beate sagt: „Ich besitze genau zwei Ringe.“ Christina sagt: „Ich habe zwei Ringe aus gleichem Material.“

Untersuche, ob man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, wer von ihnen wie viele Ringe welchen Materials besitzt, und gib gegebenenfalls diese Verteilung der Ringe an.

3. Aufgabe

Ein Schema von neun in einem 3×3-Quadrat angeordneten Zahlen, bei denen das Produkt der drei Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte 120 beträgt, heiße ProQua120.

Das in Abbildung a angegebene Schema ist ein ProQua120 mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15.

2	5	12
4	3	10
15	8	1

a

		3
1		

b

		5
3		

c

a) Vervollständige das in Abbildung b angegebene Schema zu einem ProQua120, in dem neben den beiden schon vorgegebenen Zahlen 1 und 3 jede der Zahlen 2, 4, 5, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

b) Untersuche, ob man das in Abbildung c angegebene Schema zu einem ProQua120 vervollständigen kann, in dem neben den beiden schon vorgegebenen Zahlen 3 und 5 jede der Zahlen 1, 2, 4, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

c) Ermittle, wie viele verschiedene ProQua120 existieren, in denen jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15 genau einmal vorkommt.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Für den Inhalt einer Pralinenschachtel sollen zwei Sorten Pralinen verwendet werden. Von der einen Sorte kosten 100 g Pralinen 2,30 €. Von der anderen kostet die gleiche Menge 1,80 €.

Die Bestückung solcher Pralinenschachteln soll so erfolgen, dass der Verkaufspreis pro 100 g Pralinen dieser Schachteln 2,00 € beträgt.

Ermittle, wie viel Kilogramm Pralinen der ersten Sorte für Schachteln mit einer Pralinengesamtmasse von 10 kg benötigt werden.

2. Aufgabe

Ermittle alle Zahlen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl ist eine dreistellige Primzahl.

(2) Die erste Ziffer stimmt mit der letzten überein.

(3) Die Quersumme der Zahl beträgt 19.

3. Aufgabe

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse genannt. Jede der beiden anderen Seiten heißt Kathete.

a) Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A und den Katheten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit einer von dir geeignet festgelegten Länge. Wähle auf der Hypotenuse zwischen den Punkten B und C einen Punkt P und zeichne durch P die Parallelen zu den Katheten. Die eine Parallele schneidet die Kathete $\overline{AB}$ im Punkt R, die andere Parallele schneidet die Kathete $\overline{AC}$ im Punkt S.

b) Das in der Teilaufgabe a) gebildete Viereck $ARPS$ ist ein Rechteck. Miss die Länge des Umfangs des Rechtecks $ARPS$ und vergleiche sie mit der Länge einer Kathete des Dreiecks ABC. Stelle eine Vermutung bezüglich der beiden Längen auf und beweise deine Vermutung.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(-1,0)$ und $B(3,0)$ sowie der Graph g der linearen Funktion $y = f(x) = \frac{4}{5}\,x$. Der Punkt Q liege so auf g, dass ABQ gleichschenklig ist.

a) Bestimme für eine mögliche Lage von Q die Koordinaten!

b) Wie viele verschiedene Punkte gibt es, an denen Q liegen kann?
Weise die Korrektheit der von Dir gefundenen Anzahl nach!

c) Wie kann man mit Zirkel und Lineal die in Teil b) gezählten Punkte konstruieren?
(Grundkonstruktionen wie Mittelsenkrechte, Parallele oder Winkelhalbierende dürfen direkt benutzt und müssen nicht beschrieben werden.)

Hinweis: Eine praktisch durchgeführte Konstruktion gemäß Teil c) genügt nicht als Nachweis der Richtigkeit der in Teil b) gefragten Anzahl. In Teil b) wird – wie in der Mathematik üblich – ein logischer Beweis verlangt.

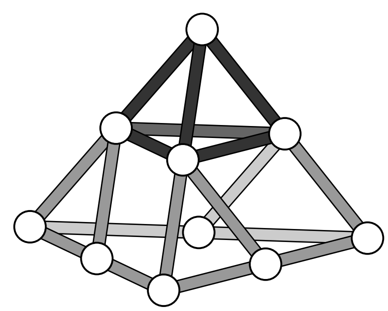
2. Aufgabe

Seien x, y und z ganze Zahlen. Weiter gelte $0 < x < y^3$ und $x + y^3 = z^3$.

Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $y + z$ für alle derartigen Tripel (x, y, z).

3. Aufgabe

Jana hat ein Magnetspiel mit 80 zueinander kongruenten Stabmagneten und 40 zueinander kongruenten Eisenkugeln. Die Verbindung von Stabmagneten kann nur über dazwischenliegende Eisenkugeln erfolgen. Die Maße der Stabmagnete und Eisenkugeln sind derart, dass sich drei Stabmagnete und drei Kugeln problemlos zu einem gleichseitigen Dreieck mit den Kugeln als „Eckpunkten“ verbinden lassen.



Jana möchte Modelle von regelmäßigen Tetraedern bauen. Tetraeder sind Vierflächner, also geometrische Körper mit vier Seitenflächen. Ein solches Tetraeder heißt regelmäßig, wenn die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

Die „Spitze“ des Tetraeder-Modells ist eine Kugel. Von dieser aus wird das Tetraeder-Modell etagenweise nach unten weitergebaut.

Die erste Etage bildet zusammen mit der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell aus vier Kugeln und sechs Stabmagneten. Die erste Etage ist in der Abbildung mit schwarzen Stabmagneten und weißen Kugeln dargestellt.

Die n-te Etage bildet zusammen mit den vorherigen Etagen und der „Spitze“ ein regelmäßiges Tetraeder-Modell, dessen Kanten aus jeweils n Stabmagneten und der entsprechenden Anzahl von Verbindungskugeln bestehen. Zur Verstärkung der Stabilität wird weiter an jeder Kugel in der untersten Ebene, die sich innerhalb einer Kante befindet, genau ein Stabmagnet als Querstrebe zu einer Kugel in der nächsthöheren Ebene angesetzt.

In der Abbildung ist ein Tetraeder-Modell mit zwei Etagen dargestellt, wobei die zweite Etage mit hellgrauen Stabmagneten und weißen Kugeln gebaut wurde.

a) Gib an, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um das Tetraeder-Modell aus der Abbildung zu bauen.

b) Ermittle, wie viele Kugeln und wie viele Stabmagnete benötigt werden, um an das Tetraeder-Modell aus der Abbildung eine weitere Etage anzubauen.

c) Ermittle die Anzahl der Kugeln und die Anzahl der Stabmagnete in der n-ten Etage.

d) Ermittle, wie viele Etagen das größte solche Tetraeder-Modell hat, das sich mit Janas Magnetspiel bauen lässt.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Seien x, y und z ganze Zahlen. Weiter gelte $0 < x < y^3$ und $x + y^3 = z^3$.

Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von $y + z$ für alle derartigen Tripel (x, y, z).

2. Aufgabe

Gegeben sind drei voneinander verschiedene Geraden, die einander in einem Punkt W schneiden.

Gesucht sind Dreiecke, in denen die gegebenen Geraden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel sind.

Klaus schlägt folgende Konstruktion vor: „Ich bezeichne die drei Geraden wie üblich mit w_α, w_β und w_γ. Auf w_γ wähle ich einen Punkt C, welcher vom Punkt W verschieden ist. Ich spiegle den Punkt C an w_α und bezeichne den Bildpunkt mit C_α. Anschließend spiegle ich den Punkt C an w_β und bezeichne diesen Punkt mit C_β. Die Gerade durch C_α und C_β heiße c. Den Schnittpunkt von c mit w_α bezeichne ich mit A und den Schnittpunkt von c mit w_β mit B. Das aus den Punkten A, B und C gebildete Dreieck ist eines der gesuchten Dreiecke.“

Zeige, dass für die von Klaus angegebene Konstruktion folgende Fälle eintreten können:

a) Die Konstruktion ist durchführbar und führt zu einem solchen Dreieck.
b) Die Konstruktion ist durchführbar, führt aber nicht zu einem solchen Dreieck.
c) Die Konstruktion ist nicht durchführbar.

3. Aufgabe

Bei einem Marathonlauf nehmen mehrere Sportler teil. Jedem Sportler soll dabei eine Startnummer zugeordnet werden, die eine ganze Zahl größer als 1 ist. Keine zwei Sportler sollen die gleiche Startnummer erhalten.

Die Startnummern sollen dabei so gewählt werden, dass die Startnummern je zweier Teilnehmer dann und nur dann teilerfremd sind, wenn sich die beiden Teilnehmer nicht gegenseitig kennen.

Man zeige, dass dies möglich ist,

a) wenn jeder jeden kennt,
b) wenn keiner einen anderen kennt,
c) wenn sie sich so in einer Reihe aufstellen, dass jeder nur seine unmittelbaren Nachbarn kennt (freilich haben die zwei äußeren Teilnehmer dieser Aufstellung dann nur einen Nachbarn),
d) wenn fünf Sportler am Lauf teilnehmen und zwei Teilnehmer T_1 und T_2 jeweils die anderen Teilnehmer T_3, T_4 und T_5 kennen, aber alle anderen sich untereinander nicht kennen.
e) Zeigen Sie, dass eine Startnummernvergabe entsprechend der Aufgabenstellung auch in jedem anderen Fall möglich ist.

Hinweis: In der Aufgabe wird – im Gegensatz zu einem Musikstar, den alle kennen, der aber selbst nur wenige seiner Fans kennt – davon ausgegangen, wenn Teilnehmer T_1 Teilnehmer T_2 kennt, dass dann auch Teilnehmer T_2 Teilnehmer T_1 kennt.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als erste Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der ersten Runde

Klassen Q1 und Q2

1. Aufgabe

Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen w, x, y, z, die die Gleichungen

$$x + 10z^2 = 2014\,, \tag{1}$$

$$2y + z = 54\,, \tag{2}$$

$$\left(y + 2z + \frac{7}{2}\,w\right) z = 1211 \tag{3}$$

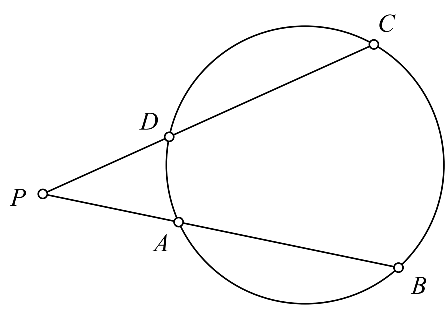
erfüllen.

2. Aufgabe

Gegeben sind ein Kreis vom Radius r und ein außerhalb dieses Kreises gelegener Punkt P. Von P werden zwei Strahlen gezeichnet, die den Kreis in vier Punkten A, B, C und D so schneiden, dass $|AB| = |BC| = |CD|$ gilt.

Ein Strahl enthält die Punkte A und B, der andere die Punkte C und D. Dabei liegt der Punkt D zwischen den Punkten P und C, und der Punkt A liegt zwischen den Punkten P und B, siehe Abbildung A 541212.

Teil a) Man bestimme die Größe des Winkels APD, wenn $|AB| = 5\,\text{cm}$ und $r = 3\,\text{cm}$ gilt. *Teil b)* Man gebe eine allgemeine Formel zur Berechnung der Größe des Winkels APD in Abhängigkeit von r und $|AB|$ an.



3. Aufgabe

Auf einige Felder eines 8×8-Schachbretts soll jeweils ein Spielstein gelegt werden. Dabei darf jedes Feld, **ob belegt oder nicht belegt**, höchstens ein Nachbarfeld haben, das mit einem Stein belegt ist. Man ermittle die maximale Anzahl von Steinen, die unter dieser Bedingung auf dem Schachbrett untergebracht werden können.

Hinweis: Als Nachbarfelder gelten hierbei alle Felder, die mit dem betrachteten Feld eine gemeinsame Seite haben.