

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Am Neujahrstag des Jahres 2014 sitzen Anna und ihre Oma beisammen. Anna freut sich immer, wenn die Oma ihr eine Knobelaufgabe stellt. Heute soll es um Zeiten gehen. Das Jahr 2014 hat 365 Tage und nun fragt die Oma:

- a) Wie viele Stunden hat das Jahr 2014?
- b) Wie viele Minuten hat das Jahr 2014?
- c) An welchem Tag (Datum) und zu welcher Uhrzeit sind insgesamt 100 Tage, 100 Stunden und 100 Minuten vergangen?
- d) An welchem Tag und zu welcher genauen Uhrzeit werden 1 000 000 Sekunden vergangen sein?

2. Aufgabe

Mara, Leon, Elisabeth und Konrad sitzen im Café, in dem vier Sorten von Getränken und vier Sorten Gebäck angeboten werden, unter anderem auch Cola, heiße Schokolade und Pfannkuchen. Jedes Kind bestellt sich genau ein Getränk und ein Gebäck. Keine zwei dieser Kinder bestellen sich dasselbe Getränk oder dasselbe Gebäck.

Es ist Folgendes bekannt:

- (1) Mara mag keine Cola.
- (2) Das Wasser hat sich Elisabeth bestellt.
- (3) Zum Streuselkuchen wurde Apfelsaft bestellt.
- (4) Leon trinkt nichts Kaltes und freut sich auf seinen Windbeutel.
- (5) Das Wasser und die Nusstorte wurden nicht zusammen bestellt.

Wem muss die Kellnerin welches Getränk und welchen Kuchen hinstellen?

3. Aufgabe

- a) Beim Tag der offenen Tür eines Gymnasiums gibt es für interessierte Schülerinnen und Schüler drei Stationen: ein Wissensquiz, eine Knobelecke und einen Bastelstand.
Um 9 Uhr befinden sich an jeder Station 8 Schüler. Bis 9:30 Uhr sind vier Schüler vom Wissensquiz zur Knobelecke, drei Schüler von der Knobelecke zum Bastelstand, zwei Schüler vom Bastelstand zum Wissensquiz und drei Schüler vom Wissensquiz zum Bastelstand gewechselt.
Ermittle, wie viele dieser 24 Schüler sich um 9:30 Uhr an welcher Station befinden.
- b) In einem Zoogehege turnen einige Affen auf Seilen, andere sitzen auf Bäumen und die restlichen sind an der Futterstelle. Nun springt ein Affe vom Seil auf einen Baum, drei Tiere klettern von den Bäumen hinunter zur Futterstelle, ein Affe geht mit einem Apfel von der Futterstelle weg und will ihn genüsslich auf einem Seil sitzend verspeisen. Fünf andere rennen von der Futterstelle zu den Bäumen. Wenn jetzt noch zwei Affen von den Bäumen zu den Seilen springen würden, wären an allen drei Plätzen gleich viele Tiere.
Wie viele Affen waren zu Beginn auf den Seilen, auf den Bäumen und an der Futterstelle, wenn insgesamt mehr als 30, aber weniger als 35 Tiere im Gehege sind?

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 6

1. Aufgabe

Lisa geht in die 6. Klasse und wird zur Teilnahme an der 54. Mathematik-Olympiade eingeladen. Sie stellt fest, dass die Zahl 54 durch 6 teilbar ist, die Quersumme von 54 – das ist 9 – aber nicht.

- a) Bestimme alle zweistelligen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und deren Quersumme ebenfalls durch 6 teilbar ist.

Nun sucht sich Lisa Zahlen, die die Quersumme 54 haben.

- b) Ermittle die kleinste derartige gerade Zahl.
c) Lisa verschärft ihre Bedingungen: Sie sucht jetzt Zahlen mit der Quersumme 54, die durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar sind.
Ermittle wieder die kleinste Zahl, für die diese Bedingungen gelten.

Hinweis: Die Quersumme einer Zahl ist die Summe ihrer Ziffern.

2. Aufgabe

Aus 2014 gleichen Würfeln soll eine Würfelpyramide gebaut werden. Ihre Spitze besteht aus einem Würfel, darunter liegt eine Schicht aus 3×3 Würfeln, darunter eine aus 5×5 Würfeln, darunter liegt eine weitere Schicht aus 7×7 Würfeln, und so geht es weiter.

- a) Aus wie vielen Schichten besteht eine Pyramide, bei der man von den 2014 Würfeln möglichst viele verwendet? Wie viele Würfel bleiben dabei ungenutzt?
b) Nun sollen aus den 2014 Würfeln zwei derartige Pyramiden gebaut werden, die nicht unbedingt gleich groß sein müssen.
Ermittle unter allen Möglichkeiten diejenige, bei der die kleinste Anzahl von Würfeln ungenutzt bleibt.

3. Aufgabe

Die drei Freunde Justin, Hennes und Lorenz erhalten verschieden hohe Taschengeldbeträge und haben unterschiedliche Lieblingsbeschäftigungen.

Folgendes sei bekannt:

- (1) Die Nachnamen der Jungen in alphabetischer Reihenfolge sind Brause, Müller und Sauerbier.
 - (2) Sie erhalten entweder 8 €, 12 € oder 20 € als Taschengeld.
 - (3) Ihre Lieblingsbeschäftigungen sind entweder „Freunde treffen“, „Computer spielen“ oder „Sport treiben“.
 - (4) Justin treibt gern Sport und er bekommt weniger Taschengeld als sein Freund mit dem Nachnamen Müller.
 - (5) Hennes erhält 12 € Taschengeld.
 - (6) Lorenz spielt nicht gern am Computer.
 - (7) Lorenz und sein Freund mit dem Nachnamen Brause bekommen beide nicht 8 € Taschengeld.
- a) Ermittle die Zuordnung der Vornamen zu den Taschengeldbeträgen.
b) Ordne jedem Jungen seinen richtigen Nachnamen, die Höhe seines Taschengeldes und seine Lieblingsbeschäftigung zu.
Weise nach, dass man diese Zuordnungen aus den angegebenen Bedingungen eindeutig ermitteln kann.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 7

1. Aufgabe

Felix will m Gegenstände gleicher Form und Größe in n gleichartige Kartons verpacken. Wenn Felix in jeden Karton genau fünf Gegenstände verpacken will, so verbleiben für den letzten Karton nur noch genau zwei Gegenstände. Wenn er hingegen in jeden vorhandenen Karton jeweils genau vier Gegenstände verpacken will, so bleibt genau ein Gegenstand übrig.

Ermittle, wie viele Gegenstände Felix in wie viele Kartons verpacken will.

2. Aufgabe

Marie gibt ihrer Freundin Elisabeth einen Würfel. Elisabeth würfelt dreimal. Marie fordert sie auf, folgende Rechnung durchzuführen: „Verdopple die erste gewürfelte Zahl, addiere zum erhaltenen Ergebnis 5, multipliziere die erhaltene Summe mit 5, addiere dazu die zweite gewürfelte Zahl, multipliziere das erhaltene Ergebnis mit 10 und addiere dazu jetzt noch die dritte gewürfelte Zahl.“ Elisabeth gibt das Ergebnis 885 an. „Jetzt weiß ich, welche drei Zahlen du gewürfelt hast“, sagt Marie.

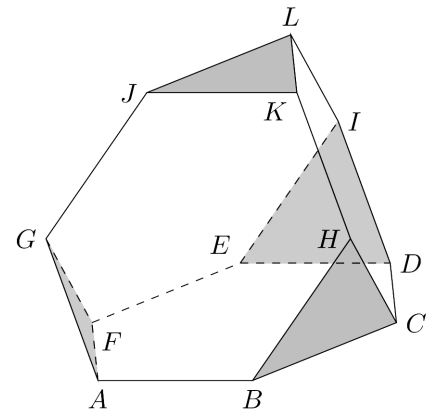
Zeige, dass man diese drei Zahlen tatsächlich eindeutig bestimmen kann, und gib sie in der von Elisabeth gewürfelten Reihenfolge an.

3. Aufgabe

Vorweg ein Hinweis: Ein regelmäßiges Tetraeder hat vier gleichseitige Dreiecke als Begrenzungsflächen.

Nun zur Abbildung:

Der abgebildete Tetraederstumpf ist ebenfalls ein regelmäßiger Körper. Das bedeutet, dass alle Kanten gleich lang sind, weiterhin sind alle Innenwinkel einer Begrenzungsfläche gleich groß. Ein solcher Tetraederstumpf entsteht aus einem größeren regelmäßigen Tetraeder, bei dem man an jeder Ecke jeweils ein gleich großes, kleineres regelmäßiges Tetraeder abschneidet.



- Welche Arten von begrenzenden Flächen hat dieser Körper, und wie viele von jeder Sorte sind es?
- Gib die Anzahlen der Ecken und Kanten an.

Der Körper hat Flächendiagonalen und Raumdiagonalen. Eine Flächendiagonale verbindet zwei nicht benachbarte Eckpunkte einer Begrenzungsfläche. Eine Raumdiagonale verbindet zwei Eckpunkte des Körpers und verläuft durch das Innere des Körpers (ist also weder Kante noch Flächendiagonale).

- Ermittle die Anzahl der Flächendiagonalen des Tetraederstumpfs.
- Ermittle die Anzahl der Raumdiagonalen des Tetraederstumpfs.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Bauer Frohgemuth zeigt Lisa auf seinem Hof einige Ferkel gleicher Masse und einige Lämmer gleicher Masse. Lisa möchte wissen, wie viel ein Ferkel wiegt und wie viel ein Lamm wiegt. Herr Frohgemuth sagt: „3 Ferkel und 2 Lämmer wiegen zusammen 22 Kilogramm, aber 2 Ferkel und 3 Lämmer wiegen zusammen 23 Kilogramm.“

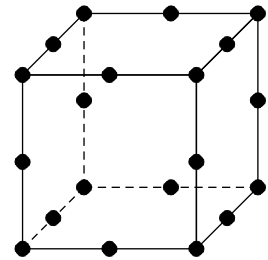
Ermittle, wie viel Kilogramm ein Ferkel wiegt und wie viel Kilogramm ein Lamm wiegt.

2. Aufgabe

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden Würfel gebaut. Bei genau 3 Kugeln auf jeder Kante ergibt sich eine Gesamtanzahl von 20 Kugeln, siehe Abbildung.

Bestimme jeweils die Gesamtanzahl der Kugeln für die folgenden Fälle:

- a) Es sind genau 2 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.
- b) Es sind genau 4 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.
- c) Es sind genau 100 Kugeln auf jeder Kante des Würfels.



3. Aufgabe

Ein Drachenviereck $ABCD$ hat folgende Eigenschaften:

- (1) Für die Seitenlängen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ gilt $|BC| = |CD| = 10 \text{ cm}$.
- (2) Für die Größen der Winkel ADC und CBA gilt $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CBA| = 75^\circ$.
- (3) Für die Größe des Winkels DCB gilt $|\sphericalangle DCB| = 60^\circ$.

Berechne den Flächeninhalt dieses Drachenvierecks.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 9

1. Aufgabe

- a) Für zwei rationale Zahlen a und b gelte

$$a - b < 0 \quad \text{und} \quad a : b < 0.$$

Weise nach, dass für jede der beiden Zahlen eindeutig feststellbar ist, ob sie positiv oder ob sie negativ ist.

- b) Weise nach: Wenn für zwei rationale Zahlen a und b die Beziehung

$$a + b = a \cdot b = a : b$$

gilt, so ist $(a - b)$ das Dreifache von a .

- c) Untersuche, ob auch die Umkehrung der Aussage b) gilt.

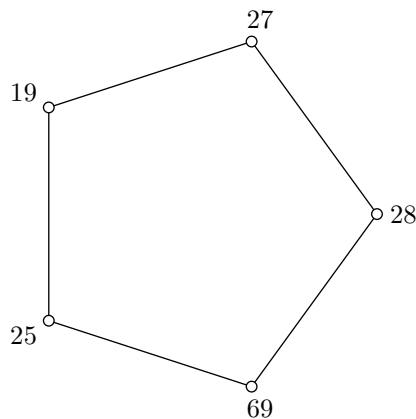
2. Aufgabe

Es sei $ABCD$ ein Rechteck und P ein Punkt in seinem Inneren. Weiter seien E, F, G, H die Lotfußpunkte von P auf die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ des Rechtecks. Die vier Lote zerlegen das Rechteck $ABCD$ in die vier Teilrechtecke $AEPH$, $EBFP$, $PFCG$ und $HPGD$.

Zeigen Sie:

- a) Wenn P auf $\overline{BD}$ liegt, dann sind die Rechtecke $AEPH$ und $PFCG$ flächengleich.
b) Wenn die Rechtecke $AEPH$ und $PFCG$ flächengleich sind, dann liegt P auf $\overline{BD}$.

3. Aufgabe



Die Ecken eines Fünfecks sollen so mit positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, sind teilerfremd.
- (2) Zwei Zahlen, die nicht an benachbarten Ecken stehen, sind nicht teilerfremd.

Eine Beschriftung der Ecken des Fünfecks entsprechend den gegebenen Bedingungen nennen wir *zulässig*.

Beispielsweise ist die Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 28, 69, 25, 19 und 27 im Uhrzeigersinn nicht zulässig, denn die Zahlen 28 und 19 liegen nicht an benachbarten Ecken, sind aber teilerfremd. Somit ist Bedingung (2) nicht erfüllt.

- a) Weise nach, dass die Zahl 2 in keiner zulässigen Beschriftung enthalten ist.
- b) Finde eine zulässige Beschriftung und weise nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderten Eigenschaften hat.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

- a) Ermitteln Sie eine positive ganze Zahl a , für die es genau eine ganze Zahl $b \neq 0$ gibt mit der Eigenschaft $a - b = a : b$.
- b) Ermitteln Sie die Anzahl der ganzen Zahlen a , für die es keine reelle Zahl $b \neq 0$ gibt mit der Eigenschaft $a - b = a : b$.

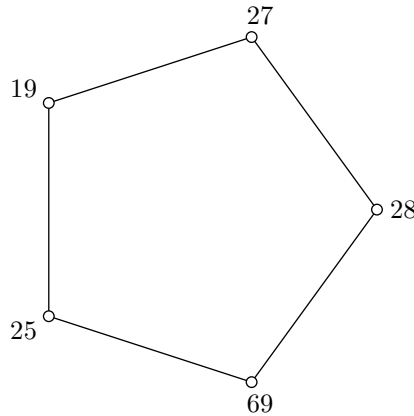
2. Aufgabe

Gegeben sind zwei Rechtecke, das Rechteck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt A_1 sowie das Rechteck $EFGH$ mit dem Flächeninhalt A_2 .

Weisen Sie nach, dass man aus den beiden Rechtecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Rechteck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.

Hinweis: Es ist nachzuweisen, dass das so konstruierte Rechteck die geforderte Eigenschaft auch wirklich besitzt.

3. Aufgabe



Die Ecken eines Fünfecks sollen so mit positiven ganzen Zahlen beschriftet werden, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Zwei Zahlen, die an benachbarten Ecken stehen, sind teilerfremd.
- (2) Zwei Zahlen, die nicht an benachbarten Ecken stehen, sind nicht teilerfremd.

Eine Beschriftung der Ecken des Fünfecks entsprechend den gegebenen Bedingungen nennen wir *zulässig*.

Beispielsweise ist die Beschriftung der Ecken des Fünfecks mit den Zahlen 28, 69, 25, 19 und 27 im Uhrzeigersinn nicht zulässig, denn die Zahlen 28 und 19 liegen nicht an benachbarten Ecken, sind aber teilerfremd. Somit ist Bedingung (2) nicht erfüllt.

- a) Weisen Sie nach, dass die Zahl 2 in keiner zulässigen Beschriftung enthalten ist.
- b) Finden Sie eine zulässige Beschriftung und weisen Sie nach, dass die angegebene Beschriftung die geforderten Eigenschaften hat.
- c) Ermitteln Sie unter allen zulässigen Beschriftungen den kleinstmöglichen Wert der größten der fünf Zahlen.

30. Essener Mathematikwettbewerb 2014/2015

als zweite Runde der 54. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen Q1, Q2

1. Aufgabe

Für jede reelle Zahl a bestimme man sämtliche Paare (x, y) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$|x - y| + x = 1, \tag{1}$$

$$x + y = a \tag{2}$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Auf den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ des Quadrates $ABCD$ liegen die Punkte E bzw. F .

Man beweise: Wenn die Punkte A , E und F die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, dann ergibt die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABE und AFD den Flächeninhalt des Dreiecks ECF .

3. Aufgabe

Man untersuche, für welche positiven ganzen Zahlen n es positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ gibt, von denen keine zwei gleich sind und für die

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$$

gilt.