

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

- a) Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, bei denen die Summe aus der Einer- und der Zehnerziffer 7 und das Produkt aus Einer- und Zehnerziffer 12 beträgt.
- b) Bestimme alle natürlichen Zahlen, die folgende zwei Bedingungen erfüllen:
 - (1) Das Produkt aus allen Ziffern dieser Zahl ist 16.
 - (2) Die Zahl besteht aus lauter gleichen Ziffern.
- c) Bestimme alle natürlichen Zahlen, die folgende zwei Bedingungen erfüllen:
 - (1) Das Produkt aus allen Ziffern dieser Zahl ist 16.
 - (2) In der Zahl kommt keine Ziffer mehrfach vor.

2. Aufgabe

Anne, Erik, Hannah, Manuela und Thea machen einen Ausflug in den Zoo. Um auszuruhen, setzen sie sich gemeinsam auf eine Bank. Thea sitzt in der Mitte und Hannah neben ihr. Anne sitzt zwischen Hannah und Manuela, aber nicht unbedingt direkt neben ihnen. Erik verteilt seine mitgebrachten Bonbons von ihm aus betrachtet nach rechts an die vier Mädchen.

- a) In welcher Reihenfolge sitzen die Freunde auf der Bank? Gib sie aus der Sicht einer vor der Bank stehenden Person an, die die Kinder anschaut.
Begründe deine Lösung!

Die fünf Kinder setzen ihren Rundgang durch den Zoo fort. Die nächste Pause machen sie wieder auf einer Bank. Thea möchte wieder in der Mitte sitzen und Erik möchte nicht zwischen zwei Mädchen sitzen.

- b) Wie viele Möglichkeiten haben die fünf Freunde, sich wie gewünscht auf die Bank zu setzen?

3. Aufgabe Schnittpunkte sind immer Punkte, in denen Figuren einander schneiden und nicht nur berühren. Fertige alle Zeichnungen mit Lineal und Bleistift an und kennzeichne und nummeriere in jedem Aufgabenteil die Schnittpunkte.

- a) Zeichne zwei Dreiecke so, dass sich sechs Schnittpunkte ergeben.
- b) Zeichne drei Dreiecke so, dass sich zehn Schnittpunkte ergeben.
- c) Zeichne drei Dreiecke so, dass die maximale Anzahl von 18 Schnittpunkten erreicht wird.
- d) Wie viele Schnittpunkte können zwei Dreiecke und eine Gerade höchstens haben? Begründe!

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 6

1. Aufgabe

Herr Kuling, Frau Lange, Herr Ness und Frau Seebach sind zu einer Tagung gefahren und übernachten in einem Hotel.

Im Hotel haben ihre vier Zimmer die Zimmernummern 544, 646, 751 und 903. Die erste Ziffer gibt jeweils das Stockwerk an – alle vier wohnen also in unterschiedlichen Stockwerken.

Die Vornamen der vier sind Andreas, Hans, Irene und Petronella.

Es ist bekannt:

- (1) Die Zimmernummern von Petronella und Hans haben die kleinste Differenz unter den vier Zimmernummern.
- (2) Frau Seebach hat als Einzige eine Zimmernummer, die durch 3 teilbar ist.
- (3) Herr Ness muss zwei Stockwerke nach unten gehen, um zu Herrn Kuling zu gelangen.

Ordne den vier Personen ihre Vornamen und Zimmernummern zu!

2. Aufgabe

Jens hilft seinem Vater beim Bauen.

- a) Es sind Bretter ins Haus zu tragen. Jens trägt immer drei Bretter auf einmal. Hätte er vier Bretter auf einmal getragen, hätte er zwölf Mal weniger laufen müssen. Wie viele Bretter hat Jens ins Haus getragen? Führe eine Probe durch!
- b) Beim Mittagessen erzählt Jens seiner Mutter: „Ich wollte alle Gehwegplatten gleichmäßig aufstapeln. Als ich jeweils 4 Platten übereinandergelegt habe, blieb eine Platte übrig. Als ich jeweils 6 Platten übereinandergelegt habe, blieb auch eine übrig. Wenn ich jeweils 8 Platten übereinandergelegt hätte, wäre auch wieder eine Platte übrig gewesen.“
Die Mutter fragt, wie viele Platten aufzustapeln waren. Jens antwortet: „Mal sehen, ob du das selbst herausbekommst. Es sind übrigens mehr als 50, aber weniger als 100 Platten.“
Welche Anzahlen für die Gehwegplatten sind möglich?
- c) Der Mörtel wird aus Mörtelpulver und Wasser zusammengemischt. Das Mischungsverhältnis von Pulver zu Wasser beträgt hinsichtlich des Gewichts 2:3.
Es sollen 25 kg Mörtel hergestellt werden. Wie viel Mörtelpulver und wie viel Wasser werden benötigt?

Auf der Rückseite geht es weiter

3. Aufgabe

In der Abbildung a ist ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 18 cm abgebildet. Dieses Quadrat ist gleichmäßig in viele weitere Quadrate unterteilt.

- a) Wie viele Quadrate kannst du in der Abbildung a finden? Beachte, dass sich Quadrate auch aus mehreren kleineren zusammensetzen können.
- b) Wie groß sind der Flächeninhalt und der Umfang des grau markierten Quadrats?

In der Abbildung b ist ein gleichschenkliges Dreieck als Teil eines Rechtecks abgebildet. Das Rechteck hat die Seitenlängen 12 cm und 8 cm. Das Dreieck ist gleichmäßig in viele weitere gleichschenklige Dreiecke unterteilt.

- c) Wie viele gleichschenklige Dreiecke kannst du in der Abbildung b finden?
- d) Wie groß ist der Flächeninhalt des grau markierten Dreiecks?

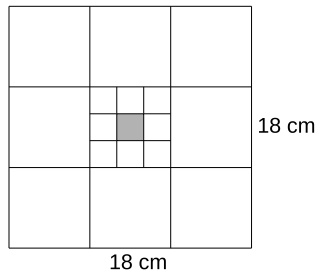


Abbildung a

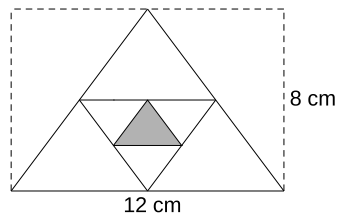


Abbildung b

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Bei einem 100-Meter-Lauf starteten 7 Mädchen. Zum Zieleinlauf wurden folgende wahre Aussagen gemacht:

- (1) Angela erreichte 1,5 Sekunden vor Birgit das Ziel.
- (2) Cornelia war 0,8 Sekunden schneller als Birgit.
- (3) Dorothea erreichte das Ziel 2,0 Sekunden später als Cornelia.
- (4) Evelyn kam 0,1 Sekunden vor Angela im Ziel an.
- (5) Franziska kam nur 0,4 Sekunden nach Evelyn ins Ziel.
- (6) Birgit kam 0,2 Sekunden später als Gudrun im Ziel an.
- (7) Zusammen hatten die Mädchen 104,4 Sekunden für den Lauf benötigt.

- a) Ermittle, wer diesen 100-Meter-Lauf gewann.
- b) Ermittle, wie viel Zeit jedes der genannten Mädchen für diese Rennstrecke brauchte.

2. Aufgabe

In der Abbildung a ist ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 18 cm abgebildet. Dieses Quadrat ist gleichmäßig in viele weitere Quadrate unterteilt.

- a) Wie viele Quadrate kannst du in der Abbildung a finden? Beachte, dass sich Quadrate auch aus mehreren kleineren zusammensetzen können.
- b) Wie groß sind der Flächeninhalt und der Umfang des grau markierten Quadrats?

In der Abbildung b ist ein gleichschenkliges Dreieck als Teil eines Rechtecks abgebildet. Das Rechteck hat die Seitenlängen 12 cm und 8 cm. Das Dreieck ist gleichmäßig in viele weitere gleichschenklige Dreiecke unterteilt.

- c) Wie viele gleichschenklige Dreiecke kannst du in der Abbildung b finden?
- d) Wie groß ist der Flächeninhalt des grau markierten Dreiecks?

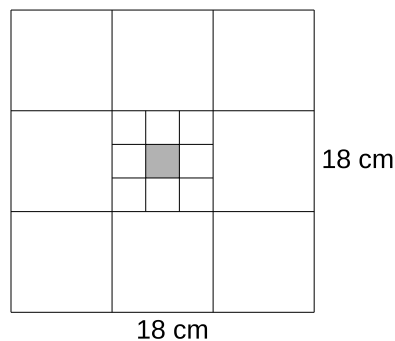


Abbildung a

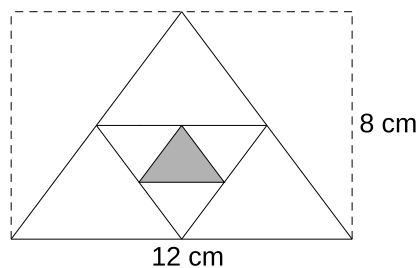


Abbildung b

Auf der Rückseite geht es weiter

3. Aufgabe

Herr Schmitz möchte etwas für seine Gesundheit tun und jeden Tag einen Teil seines Arbeitsweges mit dem Fahrrad fahren. Seine Arbeitsstelle ist 36 km von zu Hause entfernt. Den ersten Teil der Strecke bis zu einer passenden Stelle fährt er mit dem Auto mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Dann stellt er das Auto ab, steigt auf das Fahrrad um und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 20 km/h zur Arbeitsstelle. Nach der Arbeit fährt er mit den gleichen Geschwindigkeiten mit Fahrrad und Auto zurück.

- a) Am Montag fuhr er die Hälfte des Weges mit dem Auto, die andere Hälfte mit dem Fahrrad. Am Dienstag fuhr er nur noch ein Drittel des Weges mit dem Fahrrad, zwei Drittel mit dem Auto.
Berechne, wie viel Zeit Herr Schmitz für Hin- und Rückfahrt am Montag mehr brauchte als am Dienstag.
- b) Am Donnerstag stellte er fest, dass er genauso lange mit dem Auto wie mit dem Fahrrad gefahren ist.
Berechne, wie viel Zeit er an diesem Tag für die gesamte Strecke benötigte, und gib das Ergebnis auf ganze Minuten gerundet an.

Hinweis: Die Umstiegszeiten von Auto auf Fahrrad und umgekehrt sollen vernachlässigt, also als 0 angenommen werden.

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Es gibt vier Zahlen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

- (1) Die erste Zahl ist um fünf kleiner als das Dreifache der vierten Zahl.
- (2) Die zweite Zahl ist gleich der Summe aus der dritten Zahl und dem Doppelten der ersten Zahl.
- (3) Die dritte Zahl ist gleich der Differenz aus dem Dreifachen der ersten Zahl und dem Doppelten der vierten Zahl.
- (4) Die Summe der vier Zahlen beträgt 267.

Zeige, dass durch diese Bedingungen die vier Zahlen eindeutig bestimmt sind und gib diese Zahlen an.

2. Aufgabe

Gegeben sind ein Quadrat $ABCD$ und zwei Punkte R und S . Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 9 cm. Der Punkt R liegt auf der Diagonalen $\overline{AC}$ derart, dass die Strecke $\overline{AR}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{CR}$ ist. Der Punkt S liegt auf der Seite $\overline{CD}$ derart, dass die Strecke $\overline{CS}$ halb so lang wie die Strecke $\overline{DS}$ ist.

- a) Zeichne das Quadrat $ABCD$ und das Viereck $BCSR$.
- b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $BCSR$.
- c) Berechne die Größe des Winkels BRS .

Hinweis: Alle gesuchten Größen sollen aus den geometrischen Gegebenheiten exakt bestimmt werden. Messungen mit Lineal oder Geodreieck sind in diesem Sinne niemals exakt.

3. Aufgabe

Bestimme alle ganzen Zahlen a , b und c mit $0 < a \leq b \leq c$ derart, dass die Maßzahl des Volumens eines Quaders, dessen Kantenlängen die Maßzahlen a , b und c haben, genauso groß ist wie die Maßzahl der Summe aller Kantenlängen des Quaders. Die Kantenlängen werden dabei in Zentimetern, das Volumen in Kubikzentimetern gemessen.

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

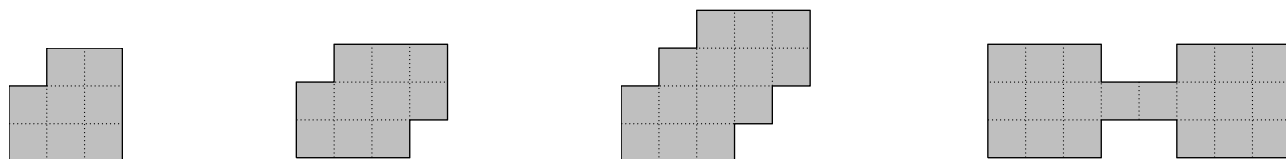
Lotta, 16 Jahre, und ihr Bruder Dieter, 12 Jahre, die schon bei „Jugend musiziert“ aufgetreten sind, spielen in einem Seniorenheim. Von der Heimverwaltung erfahren sie das Durchschnittsalter a der Senioren. Lotta rechnet und sagt dann zu ihrem Bruder: „Wenn ich mich mit meinem Alter zu den Senioren rechne, dann senkt sich das Durchschnittsalter um genau 10 Jahre.“ Dieter ergänzt: „Und wenn ich mich mit meinem Alter als weitere Person hinzunehme, dann reduziert sich das Durchschnittsalter um weitere 8 Jahre.“

- Lässt sich aus diesen Angaben das Durchschnittsalter a der Senioren eindeutig ermitteln?
- Bestimme das Durchschnittsalter a und die Anzahl n der anwesenden Senioren!

Bemerkung: Die Altersangaben der einzelnen Zuschauer werden als ganze Zahlen interpretiert.

2. Aufgabe

Max möchte folgende Figuren mit Dominosteinen, die so aussehen , auslegen:



- Er hat bereits zwei verschiedene Möglichkeiten gefunden, die linke Figur zu legen:



Finde die übrigen zwei Möglichkeiten!

Ein Nachweis, dass es tatsächlich genau vier Möglichkeiten gibt, wird nicht verlangt.

- Gib für jede der beiden mittleren Figuren alle Möglichkeiten an, sie mit Dominosteinen zu legen. Auch hier wird kein Vollständigkeitsnachweis verlangt.
- Zeige, dass man die rechte Figur nicht mit Dominosteinen legen kann.

3. Aufgabe

In einem Dreieck ABC gelte $|\sphericalangle ACB| = \gamma > 90^\circ$.

Beweise: Wenn sich das Dreieck ABC mit einem Strahl durch C in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegen lässt, dann ist ein Innenwinkel des Dreiecks ABC doppelt oder dreimal so groß wie ein anderer Innenwinkel dieses Dreiecks.

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Lotta, 16 Jahre, und ihr Bruder Dieter, 12 Jahre, die schon bei „Jugend musiziert“ aufgetreten sind, spielen in einem Seniorenheim. Von der Heimverwaltung erfahren sie das Durchschnittsalter der Senioren. Lotta rechnet und sagt dann zu ihrem Bruder: „Wenn ich mich mit meinem Alter zu den Senioren rechne, dann senkt sich das Durchschnittsalter um genau 10 Jahre.“ Dieter ergänzt: „Und wenn ich mich mit meinem Alter als weitere Person hinzunehme, dann reduziert sich das Durchschnittsalter um weitere 8 Jahre.“

- a) Lässt sich aus diesen Angaben das Durchschnittsalter der Senioren eindeutig ermitteln?
- b) Bestimmen Sie das Durchschnittsalter und die Anzahl der anwesenden Senioren!

Bemerkung: Die Altersangaben der einzelnen Zuschauer werden als ganze Zahlen interpretiert.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie für jede der folgenden Teilaufgaben, ob es Primzahlen x , y und z gibt, die die jeweilige Gleichung erfüllen.

- a) $y = z^2 - x^2$.
- b) $x^2 + y = z^4$.
- c) $x^2 + y^3 = z^4$.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie sämtliche Winkelgrößen α , für die es möglich ist, ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ und $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB| = \beta$ mittels einer nicht durch A verlaufenden Geraden in zwei gleichschenklige Teildreiecke zu zerlegen.

31. Essener Mathematikwettbewerb 2015/2016

als zweite Runde der 55. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen Q1, Q2

1. Aufgabe

Es seien x, y, z reelle Zahlen, die das Gleichungssystem

$$z = 2(x - 1)^2 - 1, \tag{1}$$

$$y = 2x + 3, \tag{2}$$

$$x = -2y + z \tag{3}$$

erfüllen. Welchen Wert kann das Produkt xyz höchstens annehmen?

2. Aufgabe

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Ein weiterer Kreis k' , dessen Mittelpunkt M' von M einen Abstand $d > 0$ hat, liege so in der Ebene, dass die beiden Kreise sich in zwei Punkten P und P' schneiden. Dabei sollen die Tangenten im Punkt P an die Kreise k und k' senkrecht aufeinanderstehen. Es sei S der Schnittpunkt der Strecken $\overline{MM'}$ und $\overline{PP'}$. Man bestimme die Länge der Strecke $\overline{MS}$ in Abhängigkeit von d und r .

3. Aufgabe

Eine Wand eines Gebäudes soll mit einem rechteckigen Streifen verziert werden, der aus zwei Reihen von quadratischen Fliesen besteht. In jeder der beiden Reihen sollen n Fliesen angebracht werden.

Der Auftraggeber verlangt, dass sich je zwei benachbarte Fliesen in der Farbe unterscheiden. Zwei Fliesen gelten dabei als benachbart, wenn sie nebeneinander oder untereinander angeordnet sind. Es stehen Fliesen in drei verschiedenen Farbtönen zur Verfügung.

Man ermittle in Abhängigkeit von der ganzen Zahl $n \geq 1$ die Anzahl aller möglichen Farbmuster.