

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klasse 5

1. Aufgabe

In einem Vieleck nennt man die Verbindungsstrecken benachbarter Eckpunkte Seiten, die Verbindungsstrecken nicht benachbarter Eckpunkte Diagonalen. Bestimme die Anzahl der Diagonalen für

- a) ein Dreieck,
- b) ein Viereck,
- c) ein Fünfeck,
- d) ein Sechseck,
- e) ein Vierzehneck.

Löse die Aufgabe e) ohne eine Zeichnung und beschreibe deinen Lösungsweg.

2. Aufgabe

Ein Spiel mit Zahlen:

- (1) Wähle eine Zahl aus.
- (2) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2, wenn sie ungerade ist, addiere 3.
- (3) Wenn du jetzt die Zahl 1 erreicht hast, höre auf, anderenfalls gehe zu (2).

- a) Beginne nacheinander mit den Zahlen 82, 83 und 84 und spiele nach diesen Regeln. Schreibe jeweils die Zahlenfolgen auf.

Interessant ist die Frage, ob man bei jeder Anfangszahl bei der 1 endet oder ob es Zahlen gibt, bei denen man die 1 nicht erreicht.

- b) Finde heraus, bei welchen Startzahlen diese Rechenvorschriften nicht dazu führen, dass man die 1 erreicht. Welche gemeinsame Eigenschaft haben alle diese Zahlen?

3. Aufgabe

In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte, die entweder blau, grün, rot oder violett sind. Jede der Farben kommt dabei mindestens einmal vor.

Es gibt genauso viele rote wie violette Stifte. Die Anzahl der blauen Stifte ist größer und die Anzahl der grünen Stifte ist kleiner als die Anzahl der roten Stifte.

Wie viele Stifte von jeder Farbe können in der Schachtel sein?

Schreibe alle Möglichkeiten auf und weise nach, dass du wirklich alle Möglichkeiten gefunden hast.

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klasse 6

1. Aufgabe

Beate denkt sich folgendes Spiel mit Zahlen aus:

- (1) Wähle eine zweistellige Zahl aus.
- (2) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2, wenn sie ungerade ist, addiere 3.
- (3) Wenn du jetzt die Zahl 1 erreicht hast, höre auf, anderenfalls gehe zu (2).

Interessant ist die Frage, ob man bei jeder Anfangszahl bei der 1 endet oder ob es Zahlen gibt, bei denen man die 1 nicht erreicht.

- a) Wähle die Startzahlen 81, 82, 84 und 87 aus und führe dann die Rechenschritte aus. Finde dabei heraus, ob die Startzahl schließlich auf die 1 führt.
- b) Bestimme eine gemeinsame Eigenschaft für diejenigen Startzahlen, die schließlich nicht auf 1 führen.

Ferdinand schlägt vor, den Schritt (2) in diesem Spiel folgendermaßen zu verändern:

- (2a) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2. Wenn sie ungerade ist und sich durch 3 teilen lässt, addiere 5, sonst addiere 3.
- c) Weise nach, dass man mit dieser neuen Bedingung von jeder Startzahl zur 1 gelangt.

2. Aufgabe

In Deutschland gibt es Münzen mit acht verschiedenen Werten:

1 ct, 2 ct, 5 ct, 10 ct, 20 ct, 50 ct, 1 €, 2 €.

Karl soll sich von jeder dieser acht Münzen eine bestimmte Anzahl nehmen, mindestens eine und höchstens acht. Alle diese Anzahlen müssen verschieden sein.

Zum Beispiel könnte er zwei 1-ct-, sieben 2-ct-, fünf 5-ct-, eine 10-ct-, acht 20-ct-, vier 50-ct-, sechs 1-€- und dann drei 2-€-Münzen nehmen und hat dann einen Geldbetrag von 16,11 €.

- a) Ermittle den größten und den kleinsten Geldbetrag, den Karl auf diese Weise erhalten kann, und gib jeweils die Anzahl der einzelnen Münzen an.
- b) Kann man die Verteilung der Münzen auch so vornehmen, dass man einen Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag erhält?
Kann man die Verteilung der Münzen auch so wählen, dass man einen Cent weniger als den größten Geldbetrag erhält?
- c) Kann man auch zwei Cent mehr als den kleinsten Geldbetrag oder zwei Cent weniger als den größten Geldbetrag erhalten?

3. Aufgabe

Die Schüler einer 6. Klasse wollen mit einer Mannschaft an einem Triathlon-Wettkampf teilnehmen. Zu jeder Mannschaft gehören drei Schüler: Der erste Mannschaftsteilnehmer muss 5 km laufen, der zweite 500 m schwimmen und der dritte 15 km Rad fahren.

Die Schüler stellen fest:

- (1) Anton und Benni sind besonders gute Läufer.
- (2) Marvin, Nico und Ole schwimmen sehr schnell.
- (3) Ulli, Victor und Wanja sind sehr gute Radfahrer.

Jeder soll in der Disziplin starten, in der er besonders gut ist. Andere Schüler dieser Klasse sollen nicht starten.

- a) Wie viele Möglichkeiten hat die Klasse, aus den genannten Schülern eine starke Mannschaft zusammenzustellen?
- b) Wie viele Möglichkeiten hat die Klasse insgesamt, wenn sie eine Mannschaft mit der Nummer 1 und eine Mannschaft mit der Nummer 2 aufstellen darf und weiterhin jeder Schüler in seiner Lieblingsdisziplin starten soll?
- c) Nico und Victor wollen unbedingt in ein und derselben Mannschaft starten oder gar nicht. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun noch, die Mannschaften 1 und 2 zu bilden?

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klasse 7

1. Aufgabe

Die Jahrgangsstufe 7 des Wandervogel-Gymnasiums plant einen Ausflug in das Deutsche Museum München. Der Mathematiklehrer Herr Teiler organisiert die Exkursion und kalkuliert die Kosten. Er überlegt: „Wenn jeder Schüler 75 Euro einzahlt, dann fehlen 440 Euro zum Gesamtbetrag. Zahlt dagegen jeder Schüler 80 Euro ein, dann bleiben 440 Euro übrig.“

Wie viele Schüler besuchen am Wandervogel-Gymnasium die Jahrgangsstufe 7?

2. Aufgabe

Zur Verfügung stehen 100 kleine Würfel. Jeder Würfel hat eine Kantenlänge von 2 cm. Aus diesen kleinen Würfeln wird ein Würfel W_1 mit größtmöglichem Volumen zusammengesetzt. Eine bestimmte Anzahl kleiner Würfel bleibt übrig. Aus ihnen wird ein weiterer Würfel W_2 mit dem nun noch größtmöglichen Volumen zusammengesetzt. Aus den restlichen Würfeln wird ein Würfel W_3 mit dem nun noch größtmöglichen Volumen zusammengesetzt, wobei Würfel übrig bleiben können.

Bestimme die Anzahl der kleinen Würfel, die nach der Zusammensetzung der Würfel W_1 , W_2 und W_3 noch übrig bleiben.

3. Aufgabe

Susanne hat eine interessante Zahl aufgeschrieben. Die Zahl ist sechsstellig. Jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 kommt genau einmal vor. Betrachtet man nur die von links ersten beiden Ziffern, so ist diese zweistellige Zahl durch 2 teilbar. Betrachtet man nur die von links ersten drei Ziffern, so ist diese dreistellige Zahl durch 3 teilbar. Dies geht so fort bis zur sechsstelligen Zahl, die durch 6 teilbar ist.

a) Gib eine Zahl an, die Susanne aufgeschrieben haben könnte.

b) Susanne möchte wissen, ob es noch weitere derartige Zahlen gibt.

Finde alle derartigen Zahlen und begründe, warum nur diese Zahlen die gegebenen Bedingungen erfüllen.

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade

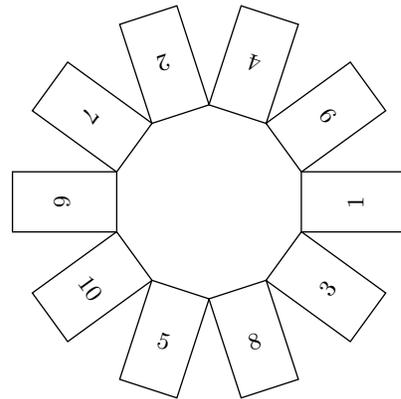
Aufgaben der ersten Runde

Klasse 8

1. Aufgabe

Frank hatte 10 verschlossene, nummerierte Kästen vor sich auf dem Tisch. Die Kästen waren, wie in der Abbildung dargestellt, kreisförmig angeordnet.

„Was machst du denn da?“, fragte sein Freund Sven neugierig. Frank erklärte ihm: „Ich habe in irgendeinen dieser Kästen einen Zettel mit der Zahl 1 gelegt. Dann habe ich in den im Uhrzeigersinn nächsten Kasten einen Zettel mit der Zahl 2 gelegt, wieder in den dann im Uhrzeigersinn nächsten Kasten einen Zettel mit der Zahl 3 und so fort, bis ich in den letzten Kasten einen Zettel mit der Zahl 10 gelegt habe. Wenn du mir jetzt sagen kannst, in welchem Kasten der Zettel mit deiner Glückszahl 7 liegt, dann bist du ein Hellseher.“ „Du könntest mir wenigstens sagen, bei wie vielen Kästen die Kastenummer mit der Zahl auf dem Zettel im Innern des Kastens übereinstimmt“, meinte Sven. „Das geht leider nicht. Denn würde ich dir dies sagen, dann wüsstest du, in welchem Kasten der Zettel mit der Zahl 7 liegt.“ Nach dieser Aussage konnte Sven nach einigem Nachdenken den richtigen Kasten benennen.



Welche Kastenummer hat Sven angegeben?

Erläutere, wie Sven seine korrekte Antwort hergeleitet haben könnte.

2. Aufgabe

Nach einer Aufgabe aus einem alten Mathematikbuch:

Die beiden Läufer Anton und Bernd machen ein Wettrennen auf einer 800 Meter langen Bahn. Wenn Bernd vom schnelleren Anton einen Vorsprung von 30 Metern bekommt, dann ist Anton 2,0 Sekunden früher am Ziel als Bernd. Wenn Bernd von Anton hingegen einen Vorsprung von 50 Metern bekommt, dann ist Anton 1,2 Sekunden später am Ziel als Bernd.

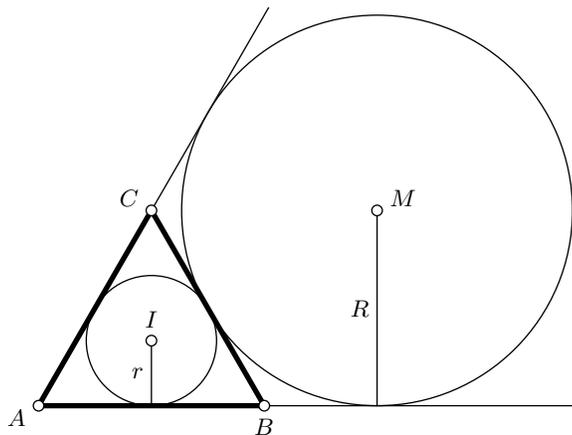
Ermittle die Geschwindigkeit von Anton und die von Bernd in Metern pro Sekunde auf zwei Nachkommastellen genau.

Hinweis: Bernd läuft beide Male mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit, ebenso Anton.

3. Aufgabe

In der Abbildung ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit seinem Inkreis und einem der drei Ankreise dargestellt.

Ermittle das Verhältnis von Ankreisradiuslänge R zu Inkreisradiuslänge r .



Hinweis: Es ist nicht zulässig, Messwerte zum Ermitteln der Lösung zu verwenden.

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klasse 9

1. Aufgabe

In einem Wandergebiet gibt es vier Ausflugsziele A , B , C und D . Zwischen je zweien dieser Ausflugsziele verlaufen einige Wanderwege. Die Wanderwege kreuzen sich nicht. Eine *Wanderroute* beginnt an einem der Ausflugsziele und verläuft entlang der Wanderwege zu einem der anderen Ausflugsziele, wobei zwischendurch andere Ausflugsziele besucht werden können. Kein Ziel wird bei einer Wanderroute mehrfach angesteuert.

Es ist bekannt, dass es zwischen A und B genau 3 Wanderwege, zwischen B und C genau 2 Wanderwege, zwischen A und C genau 4 Wanderwege und zwischen A und D genau 5 Wanderwege gibt. Von B nach D gibt es genau 104 Wanderrouen, von D nach C genau 151 Wanderrouen.

Wie viele Wanderrouen gibt es von A nach C ?

2. Aufgabe

Nach einer Aufgabe aus einem alten Mathematikbuch:

Die beiden Läufer Anton und Bernd machen ein Wettrennen auf einer 800 Meter langen Bahn. Wenn Bernd vom schnelleren Anton einen Vorsprung von 30 Metern bekommt, dann ist Anton 2,0 Sekunden früher am Ziel als Bernd. Wenn Bernd von Anton hingegen einen Vorsprung von 50 Metern bekommt, dann ist Anton 1,2 Sekunden später am Ziel als Bernd.

Ermittle die Geschwindigkeit von Anton und die von Bernd in Metern pro Sekunde auf zwei Nachkommastellen genau.

Hinweis: Bernd läuft beide Male mit der gleichen, konstanten Geschwindigkeit, ebenso Anton.

3. Aufgabe

Tabea möchte auf möglichst einfache Weise herausbekommen, ob eine vorgegebene positive ganze Zahl n genau 6 positive Teiler hat.

- Gib – ohne Begründung – alle positiven ganzen Zahlen kleiner als 60 an, die genau 6 positive Teiler haben.
- Tabea hat ein Verfahren gefunden, anhand der Primfaktorzerlegung von n herauszufinden, ob n genau 6 positive Teiler hat.
Beschreibe ein solches Verfahren und beweise dessen Korrektheit.

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

In der Gleichung

$$***** - ***** = 2017$$

ist jeder Stern so durch eine der Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ zu ersetzen, dass die Gleichung stimmt. Keine zwei Sterne dürfen durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Die Ziffer Null darf nicht an erster Stelle einer Zahl stehen.

- Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, dies zu tun. Weisen Sie nach, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.
- Beweisen Sie, dass es keine Lösung gibt, wenn man 2017 durch 2016 ersetzt.

2. Aufgabe

Tabea möchte auf möglichst einfache Weise herausbekommen, ob eine vorgegebene positive ganze Zahl n genau 6 positive Teiler hat.

- Geben Sie – ohne Begründung – alle positiven ganzen Zahlen kleiner als 60 an, die genau 6 positive Teiler haben.
- Tabea hat ein Verfahren gefunden, anhand der Primfaktorzerlegung von n herauszufinden, ob n genau 6 positive Teiler hat.
Beschreiben Sie ein solches Verfahren und beweisen Sie dessen Korrektheit.

3. Aufgabe

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = 12$ und $|BC| = 6$.

Der Mittelpunkt von \overline{AB} wird mit M und der Mittelpunkt von \overline{BC} mit N bezeichnet. Auf der Strecke \overline{NC} wird ein beliebiger Punkt P gewählt. Der Schnittpunkt von PM mit der Parallelen zur Geraden AB durch N wird mit Q bezeichnet. R sei nun der Bildpunkt von P bei der Spiegelung an Q . Die Punkte U und V sollen die Lotfußpunkte von R auf AD beziehungsweise auf CD sein.

Welche Werte für den Flächeninhalt des Rechtecks $URVD$ sind möglich?

Hinweis: Eine Vermutung, welche Werte möglich sind, kann man sich zum Beispiel mit Hilfe des Computerprogramms *geogebra* erarbeiten. Mit Hilfe dieses Programms, das im Internet frei erhältlich ist, kann man geometrische Zeichnungen erstellen und u. a. einen Punkt an einem anderen Punkt spiegeln sowie den Flächeninhalt von konstruierten Vielecken bestimmen. Die eigentliche Aufgabe besteht dann aber darin, die Korrektheit der wie auch immer gewonnenen richtigen Vermutung logisch zu begründen.

32. Essener Mathematikwettbewerb 2016/2017

als erste Runde der 56. Deutschen Mathematikolympiade
Aufgaben der ersten Runde
Klassen Q1 und Q2

1. Aufgabe

Man bestimme alle reellen Zahlen x, y , die das Gleichungssystem

$$\sqrt{x - 2016} + \sqrt{y - 56} = 11, \quad (1)$$

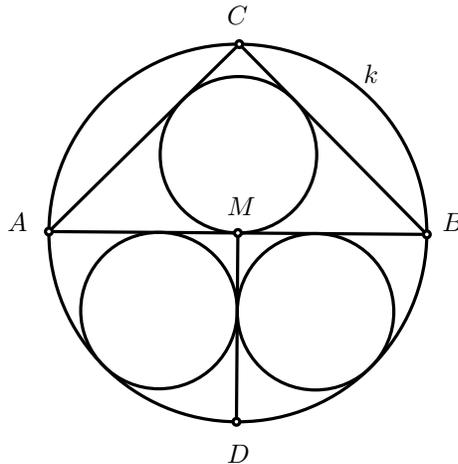
$$x + y = 2193 \quad (2)$$

erfüllen.

2. Aufgabe

Im Kreis k sind M der Mittelpunkt, die Strecke \overline{AB} ein Durchmesser und C ein Punkt auf der Kreislinie, der von A und von B verschieden ist. Das Dreieck ABC ist außerdem gleichschenkelig. Der Radius \overline{MD} steht außerhalb des Dreiecks ABC auf dem Durchmesser \overline{AB} senkrecht; siehe Abbildung.

Man beweise, dass der Inkreis des Dreiecks ABC und die Kreise, die den Durchmesser \overline{AB} , den Radius \overline{MD} und den Kreis k berühren, gleichen Radius haben.



3. Aufgabe

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot |x| - 2x$.

- Zeichnen Sie den Graph der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie durch Argumentieren anhand des Graphen dieser Funktion f diejenigen reellen Zahlen s , für welche die Gleichung $x \cdot |x| - 2x = s$ genau zwei verschiedene Lösungen für x hat.

Hinweis: Das Ablesen von Werten aus der Zeichnung führt höchstens zu einer Vermutung, deren Korrektheit dann aber noch begründet werden muss.