33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 5

1. Aufgabe

Anna, Bettina, Clara, Daniela und Emily spielen in einem Handballverein und haben heute Siebenmeter-Würfe geübt. Jedes der fünf Mädchen hatte zehn Würfe.

Danach wurde bekannt:

(1) Insgesamt wurden 35 Tore erzielt.
(2) Jedes Kind hat eine andere Anzahl von Treffern erzielt.
(3) Daniela hat am wenigsten Treffer geworfen.
(4) Emily hat ein Tor weniger erzielt als Clara und zwei weniger als Anna.
(5) Anna hatte nur einen Fehlwurf.

Tatsächlich kann man aus diesen fünf Aussagen die Trefferanzahlen der fünf Mädchen nicht eindeutig bestimmen: Es gibt zwei mögliche Verteilungen.

Ermittle diese beiden möglichen Verteilungen.

2. Aufgabe

An einem Wandertag veranstaltet die 5. Klasse eine Schatzsuche. Die Klasse wird in zwei Gruppen geteilt. Jede Gruppe muss nacheinander drei Hinweise zum Versteck des Schatzes finden.

Die erste Gruppe findet den ersten Hinweis schon nach acht Minuten. Für den dritten Hinweis braucht die Gruppe dreimal so lange wie für den zweiten. Nach genau einer Stunde haben sie die drei Hinweise entdeckt.

Die zweite Gruppe benötigt die meiste Zeit zum Finden des ersten Hinweises. Für den zweiten Hinweis braucht die Gruppe acht Minuten weniger und für den dritten Hinweis nochmals acht Minuten weniger als für den zweiten. Insgesamt hat auch die zweite Gruppe genau eine Stunde benötigt.

Wie lange haben die Gruppen jeweils die einzelnen Hinweise gesucht?

Führe jeweils eine Probe durch.

3. Aufgabe

Clara hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 4 cm. Drei Seitenflächen sind gelb angemalt, drei rot; die Flächen mit der gleichen Farbe treffen jeweils an einer Ecke zusammen.

Anschließend zersägt sie den großen Würfel in kleine Würfel mit der Kantenlänge 1 cm.

a) Wie viele kleine Würfel erhält sie?
b) Clara sortiert die Würfel nach der Anzahl der bemalten Flächen, egal ob rot oder gelb. Wie viele verschiedene Würfelsorten findet sie? Wie viele Würfel findet sie jeweils von den einzelnen Sorten?

Nun setzt Clara die kleinen Würfel zu größeren Würfeln zusammen.

c) Kann es ihr gelingen, einen Würfel zu bauen, bei dem alle Außenflächen rot sind? Begründe deine Antwort.

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde
Klasse 6

<u>1. Aufgabe</u>

Frau Nolle und Frau Bock müssen zu einem Treffen nach Berlin. Sie fahren beide mit ihrem Auto. Frau Nolle kommt aus Bielefeld und muss 400 km fahren, Frau Bock kommt aus Bonn, fährt über Bielefeld und muss insgesamt 600 km fahren. Frau Nolle fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h, Frau Bock fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h.

a) Wie lange brauchen beide jeweils, bis sie ihr Ziel erreicht haben?

Frau Bock fährt um 10:00 Uhr morgens los, Frau Nolle um 11:30 Uhr.

b) Wie viele Kilometer hat Frau Bock zurückgelegt, wenn Frau Nolle losfährt?

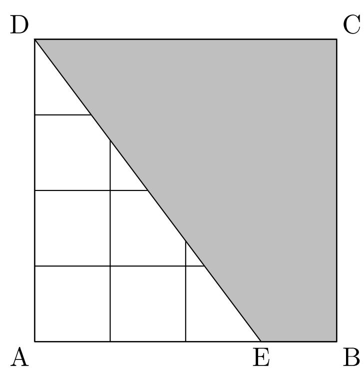
c) Wann erreicht Frau Bock Bielefeld?

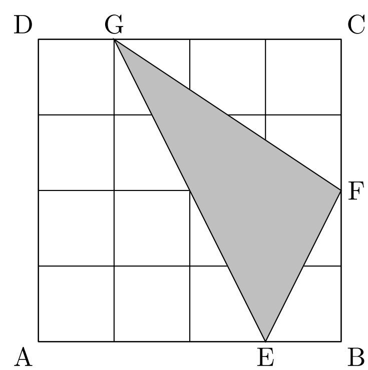
d) Ermittle den Zeitpunkt, an dem Frau Bock Frau Nolle eingeholt hat.

<u>2. Aufgabe</u>

Die zwei Abbildungen zeigen jeweils ein Quadrat $ABCD$, das aus 4×4 Kästchen (Einheitsquadraten) besteht. Ein Teil ist jeweils grau gefärbt.

Berechne für jede graue Fläche den Flächeninhalt in Kästchen.





<u>3. Aufgabe</u>

LENA und ANNE sitzen zusammen und denken über ihre Vornamen nach.

a) LENA sagt: „Mein Vorname hat vier Buchstaben, ein A, ein E, ein L und ein N.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese vier Buchstaben jeweils verschieden anzuordnen?“

b) ANNE überlegt entsprechend: „Mein Vorname hat auch vier Buchstaben. Dann gibt es genauso viele Möglichkeiten wie bei LENA.“
Hat ANNE Recht?

c) Nun kommt auch noch NANNI und sagt: „Mein Vorname hat sogar fünf Buchstaben. Bei mir gibt es deswegen mehr Möglichkeiten der Anordnung als bei euch mit euren vier Buchstaben.“
Hat NANNI Recht?

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 7

1. Aufgabe

Für eine Zaunfront benötigt Herr Kunze 11 Pfosten bei einem Pfostenabstand von 2,40 m. Wie viele Pfosten benötigt Herr Kunze, wenn der Abstand 1,50 m betragen soll?

Hinweis: Die Breite der Pfosten soll vernachlässigt werden.

2. Aufgabe

Jonas hat aus den Ziffern von 1 bis 9 drei Ziffern ausgewählt, die alle unterschiedlich sind. Aus diesen drei Ziffern hat er alle dreistelligen Zahlen gebildet, in denen jede dieser drei Ziffern genau einmal vorkommt. Die Summe aller dieser dreistelligen Zahlen ist eine vierstellige Zahl, die auf 18 endet.

Weise nach, dass aus diesen Angaben die vierstellige Zahl eindeutig ermittelt werden kann, und gib sie an.

3. Aufgabe

Die Seite $\overline{BC}$ eines gleichseitigen Dreiecks ABC wird über den Punkt C hinaus verlängert. Auf dieser Verlängerung liegt der Punkt D derart, dass die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ gleich lang sind. Die Punkte A und D werden durch eine Strecke miteinander verbunden.

a) Zeichne die beschriebene Figur und beschrifte die genannten Punkte.

b) Berechne die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ACD.

c) Ist der Flächeninhalt des Dreiecks ACD größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt des Dreiecks ABC? Begründe deine Antwort.

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 8

<u>1. Aufgabe</u>

Eine neue Rechenoperation $\circ$ zweier rationaler Zahlen a und b mit $b \neq 0$ wird durch

$$a \circ b = a - \frac{a}{b}$$

erklärt. Zum Beispiel gilt

$$1 \circ 3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

a) Berechne $7 \circ 4$ und $7 \circ (-2)$.

b) Prüfe durch Rechnung nach, ob $3 \circ 4 = 4 \circ 3$ und $(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ (3 \circ 4)$ gelten.

c) Ermittle die Zahl a, für die $a \circ 2 = 2$ gilt.

<u>2. Aufgabe</u>

Es sei ABC ein stumpfwinkliges Dreieck und A sei der Scheitel des stumpfen Winkels. Der Punkt E sei derjenige Punkt auf der Geraden AC, für den die Geraden AC und BE senkrecht aufeinander stehen. Der Punkt F sei derjenige Punkt auf der Geraden AB, für den die Geraden AB und CF senkrecht aufeinander stehen. Schließlich sei S der Schnittpunkt der Geraden BE und CF.

Beweise: Unter diesen Voraussetzungen ist die Größe des Winkels $\sphericalangle BSC$ gleich der Summe der Größen der beiden spitzen Innenwinkel des Dreiecks ABC.

<u>3. Aufgabe</u>

Fritz besitzt mehrere zweifarbige Kugeln, und zwar rot-blaue, rot-grüne, rot-weiße, blau-grüne, blau-weiße und grün-weiße. Er verrät uns:

(1) Die Kugeln liegen in einer Kiste.
(2) Die Anzahl der blau-grünen Kugeln ist durch 2 teilbar.
(3) Genau ein Drittel der Kugeln ist zu einem Teil blau.
(4) Genau ein Viertel der Kugeln ist blau-weiß.
(5) Genau ein Fünftel der Kugeln ist rot-grün.
(6) Es gibt sechsmal so viele rot-grüne Kugeln wie rot-blaue Kugeln.
(7) Die Anzahl der Kugeln ist kleiner als das Siebenfache von 20.

a) Zeige, dass die Anzahl der Kugeln durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, und gib diese Anzahl an.

b) Ermittle den prozentualen Anteil der Kugeln, die blau-grün sind, an der Gesamtzahl der Kugeln.

c) Ermittle den prozentualen Anteil der Anzahl der blau-grünen Kugeln an der Anzahl der Kugeln, die zu einem Teil blau sind.

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 9

1. Aufgabe

Gegeben sind drei zerbeulte Kanister A, B und C. Es ist bekannt, dass Kanister A genau acht Liter, Kanister B genau fünf Liter und Kanister C genau drei Liter Fassungsvermögen hat. Keiner der Kanister besitzt eine Maßeinteilung. Es ist somit unmöglich, an unvollständig gefüllten Kanistern den Stand einer teilweisen Füllung abzulesen.

Trotzdem ist es durch Umfüllvorgänge beispielsweise möglich, von anfangs im Kanister A enthaltenen acht Litern Flüssigkeit zwei Liter abzumessen:

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \to B$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3

Für das Umfüllen gelten dabei folgende Regeln: Beim Umfüllen wird nichts verschüttet. Ein Kanister wird entweder vollständig in einen anderen Kanister entleert, oder es wird genau so viel umgefüllt, bis der Zielkanister randvoll ist. Es wird keine Flüssigkeit weggeschüttet.

a) Zeige, dass man bei einem Anfangsstand von acht Litern Flüssigkeit in Kanister A und leeren Kanistern B und C mit weniger als acht Umfüllvorgängen erreichen kann, dass sich gleichzeitig in einem der Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit befinden. Verwende zur Darstellung eine Tabelle nach obigem Muster.

b) Dieselkraftstoff wird traditionell aus Erdöl hergestellt, während Biodiesel aus Pflanzen erzeugt wird. Beide Kraftstoffarten sind mischbar, wobei die beiden Arten in jedem Gemisch gleichmäßig verteilt sind.
Der Kanister B sei anfangs mit fünf Litern Diesel, der Kanister C mit drei Litern Biodiesel gefüllt und der Kanister A sei leer.
Finde eine Folge von Umfüllungen, bei der sich
   - nach drei Umfüllvorgängen in Kanister A genau sechs Liter Gemisch und
   - nach vier weiteren Umfüllvorgängen in den Kanistern A und B jeweils genau vier Liter Gemisch befinden.

2. Aufgabe

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ und Basiswinkeln der Größe 30° schneiden die Mittelsenkrechten der Schenkel $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ die Basis in den Punkten E und F.

Weisen Sie nach, dass dann $|AE| = |EF| = |FB|$ gilt.

3. Aufgabe

Gegeben ist die beiden Funktionen f mit der Gleichungen

$$f(x) = -4 \cdot |x - 4| + 8\,.$$

a) Zeichne den Graphen der Funktion f in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

b) Ermittle rechnerisch alle Nullstellen der Funktion f.

c) Ermittle reelle Zahlen p, q, r, für die die Funktion c mit der Gleichung

$$c(x) = p \cdot |x - q| + r$$

eine Nullstelle $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klasse 10 / EF

1. Aufgabe

Gegeben sind drei zerbeulte Kanister A, B und C. Es ist bekannt, dass Kanister A genau acht Liter, Kanister B genau fünf Liter und Kanister C genau drei Liter Fassungsvermögen hat. Keiner der Kanister besitzt eine Maßeinteilung. Es ist somit unmöglich, an unvollständig gefüllten Kanistern den Stand einer teilweisen Füllung abzulesen.

Trotzdem ist es durch Umfüllvorgänge beispielsweise möglich, von anfangs im Kanister A enthaltenen acht Litern Flüssigkeit zwei Liter abzumessen:

Umfüllvorgang	Inhalt A (8)	Inhalt B (5)	Inhalt C (3)
(Anfang)	8	0	0
$A \to B$	3	5	0
$B \to C$	3	2	3

Für das Umfüllen gelten dabei folgende Regeln: Beim Umfüllen wird nichts verschüttet. Ein Kanister wird entweder vollständig in einen anderen Kanister entleert, oder es wird genau so viel umgefüllt, bis der Zielkanister randvoll ist. Es wird keine Flüssigkeit weggeschüttet.

a) Zeigen Sie, dass man bei einem Anfangsstand von acht Litern Flüssigkeit in Kanister A und leeren Kanistern B und C mit weniger als acht Umfüllvorgängen erreichen kann, dass sich gleichzeitig in einem der Kanister ein Liter und in einem anderen vier Liter Flüssigkeit befinden. Verwenden Sie zur Darstellung eine Tabelle nach obigem Muster.

b) Dieselkraftstoff wird traditionell aus Erdöl hergestellt, während Biodiesel aus Pflanzen erzeugt wird. Beide Kraftstoffarten sind mischbar, wobei die beiden Arten in jedem Gemisch gleichmäßig verteilt sind.
Der Kanister B sei anfangs mit fünf Litern Diesel, der Kanister C mit drei Litern Biodiesel gefüllt und der Kanister A sei leer.
Finden Sie eine Folge von Umfüllungen, bei der sich
   - nach drei Umfüllvorgängen in Kanister A genau sechs Liter Gemisch und
   - nach vier weiteren Umfüllvorgängen in den Kanistern A und B jeweils genau vier Liter Gemisch befinden.

2. Aufgabe

Gegeben sind die beiden quadratischen Funktionen a und b mit den Gleichungen

$$a(x) = -2\,(x-2)\,(x-6) \quad \text{und} \quad b(x) = -\frac{1}{6}\,x^2 + \frac{8}{3}\,x - \frac{14}{3}\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

b) Die Funktion b hat eine zweite Nullstelle. Bestimmen Sie diese.

c) Eine quadratische Funktion c hat eine Nullstelle $x_1 = 2$ und ihr Graph den Scheitelpunkt $S_c(6,7)$. Ermitteln Sie eine Gleichung für c.

d) Weisen Sie nach, dass der Scheitelpunkt S_c des Graphen der Funktion c der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Scheitelpunkten S_a und S_b der Graphen der Funktionen a und b ist.

3. Aufgabe

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ und Basiswinkeln der Größe $\alpha < 45°$ schneiden die Mittelsenkrechten der Schenkel $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ die Basis in den Punkten E und F.

a) Angenommen, es gilt $\alpha = 30°$. Weisen Sie nach, dass dann $|AE| = |EF| = |FB|$ gilt.

b) Angenommen, es gilt $0 < \alpha < 45°$. Zeigen Sie, dass die Umkreismittelpunkte der Dreiecke EBC und FCA auf dem Umkreis k des Dreiecks EFC liegen.

33. Essener Mathematikwettbewerb 2017/2018

als zweite Runde der 57. Deutschen Mathematikolympiade

Aufgaben der zweiten Runde

Klassen Q1, Q2

1. Aufgabe

Für welche reellen Zahlen z gibt es positive ganze Zahlen a, b und c, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \;+ b \;+ c \; &= 57\,, \\ a^2 + b^2 - c^2 &= z\,, \\ z \cdot c \; &= 2017 \end{aligned}$$

erfüllen? Man bestimme jeweils alle Lösungen (a, b, c) in Abhängigkeit von z.

2. Aufgabe

Man beweise, dass die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte des Inkreises eines Dreiecks und eines seiner Ankreise vom Umkreis des Dreiecks halbiert wird.

Hinweis: Ein Kreis heißt Ankreis eines Dreiecks, wenn er eine Dreiecksseite von außen und die Verlängerungen der anderen beiden Dreiecksseiten berührt.

3. Aufgabe

Man bestimme den kleinsten Wert, den das Produkt

$$p = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right)$$

annehmen kann, wenn a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$ sind.